UNIVERSITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Dofková, R., Kopecký, M.

GEOMETRIE 2

OLOMOUC 2007

Obsah

16. Vektorové prostory se skalárním součinem

V následující kapitole poznáme užitečnost skalárního součinu. Matematikové nám ale připravili takový malý problém, o kterém musíme něco vědět, abychom se vyhnuli problémům mnohem větším. My už z minulých kapitol víme, že průnikem dvou konvexních útvarů vzniká zase konvexní útvar. Přesuňme se na chvíli do $\mathbf{V}_2$. Polorovina je konvexní útvar, jak jsme poznali v kapitole o konvexních útvarech v 1. dílu. Průnikem dvou polorovin, jejichž hraniční přímky jsou spolu různoběžné, je úhel. Úhel (označme ho např. α) je tedy část roviny. Takto definovaný úhel nemůže mít žádnou velikost, protože obsah té části roviny, která představuje úhel α, je vždycky nekonečný. Přitom se pojem „velikost úhlu“ na školách běžně používá. Intuitivně tušíme, že máme na mysli něco úplně jiného, co s rovinou nemá téměř nic společného. Pod velikostí úhlu intuitivně tušíme velikost odchylky dvou polopřímek, jejichž počáteční bod je totožný.

Z předchozího textu tušíme, že budou zřejmě trochu problémy s pojmem „odchylka dvou vektorů“. Ale tento pojem nás teď právě zajímá, protože chceme umět vypočítat např. odchylku hrany jehlanu s libovolnou podstavou a problémy podobné. V matematice se pojem odchylka vektorů zavádí pomocí skalárního součinu dvou vektorů. Tento pojem se tedy týká pouze dvou vektorů, lze ho však definovat v *n*-rozměrném vektorovém prostoru.

V následujícím se bude pod pojmem vektorový prostor rozumět vždy vektorový prostor nad tělesem **R** reálných čísel. Budiž tedy dán *n*-dimenzionální vektorový prostor $\mathbf{V}_n$.

Definice 16.1: <u>Skalární součin ve $\mathbf{V}_n$</u> je zobrazení $\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \to \mathbf{R}$, které každé uspořádané dvojici $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n$ přiřazuje reálné číslo $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, přičemž jsou pro všechny vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_n$ a všechna reálná čísla $a \in \mathbf{R}$ splněny následující podmínky:

(SS1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$,

(SS2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$,

(SS3) $(a\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = a(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$,

(SS4) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geq 0$; $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Vzhledem k (SS4) budeme psát $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}^2$.

Co si máte pod skalárním součinem dvou vektorů představit? Bohužel v tuto chvíli nejsme ještě schopni žádnou konkrétní představu připravit. Ještě chvíli se budete muset spokojit s touto „suchou“ definicí. Pouze si uvědomme, že (SS4) neříká, že skalární součin dvou libovolných vektorů je nezáporný, nýbrž že skalární součin vektoru s týmž vektorem je nezáporný a je roven nule pouze v případě, že ten uvažovaný vektor je nulovým vektorem. V následující větě si ukážeme další vlastnosti skalárního součinu.

Věta 16.1: Pro všechny vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_n$ a pro všechna reálná čísla $a \in \mathbf{R}$ platí:

a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$,

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}^2$,

c) $\mathbf{u}\cdot(a\mathbf{v}) = \mathrm{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$,

d) $\mathbf{o}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{o} = 0$,

e) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}((\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2)$.

Důkaz 16.1:

(a) plyne z (SS1) a (SS2).

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}^2$.

(c) plyne z (SS1) a (SS3).

(d) $\mathbf{o}\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{v} - \mathbf{v})\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{v} + (-\mathbf{v}))\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + (-\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0$.

(e) plyne z b).

Platí vztahy:

Velikost vektoru **u**: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u.u}}$. (16.1)

Jednotkový vektor **e**: $\|\mathbf{e}\| = 1$. (16.2)

Normovaný vektor k nenulovému vektoru **u** (ozn. $\mathbf{u}^0$) je vektor

$$\mathbf{u}^0 = \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\right).\mathbf{u} \qquad (16.3)$$

Odchylka dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ (označujeme symbolem $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$) je reálné číslo $x \in \langle 0, \pi\rangle$, které je definováno pomocí jeho kosinu následovně:

$$\cos\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,.\,\|\mathbf{v}\|} \quad . \tag{16.4}$$

Nyní již máme možnost si skalární součin dvou vektorů, alespoň ve $\mathbf{V}_2$, konkrétně představit. K představě použijeme geometrického modelu dvojdimenzionálního vektorového prostoru. Vzorec (16.4) upravíme na tvar

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|.\cos\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

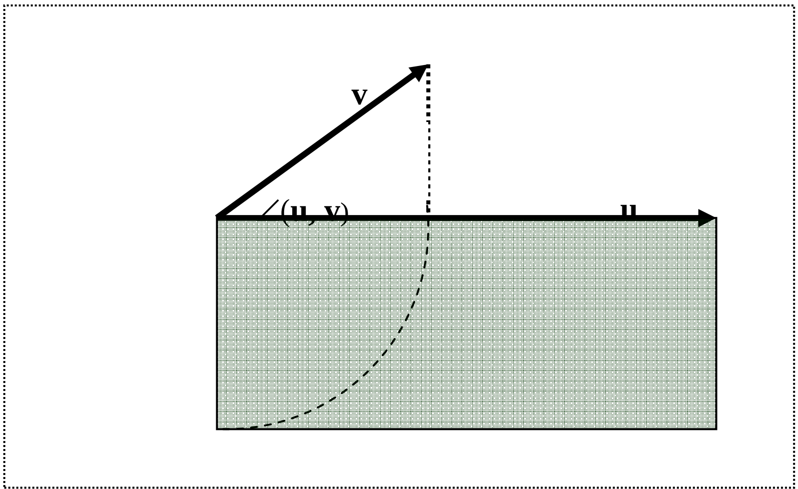
a po použití asociativního zákona můžeme psát

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|.(\|\mathbf{v}\|.\cos\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})) \tag{16.5}$$

Ze vztahu (16.5) je zřejmé, že skalární součin dvou vektorů je číselně vyjádřen obsahem obdélníku, jehož jedna strana má velikost $||\mathbf{u}||$ a druhá strana má velikost $||\mathbf{v}||.\cos\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Protože druhé číslo může být záporné (pro $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in (\pi/2,\ \pi\rangle$), měli bychom říci, že druhá strana toho obdélníku má velikost $|\ ||\mathbf{v}||.\cos\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})\ |$. Už teď je zřejmé, že je-li

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$, je $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in (\pi/2,\ \pi\rangle$,
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$, je $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \langle 0,\ \pi/2)$,
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, je $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \pi/2$.

Doprovoďme tento text názorným obrázkem 16.1.



Obr. 16.1

Vlastnosti skalárního součinu:

Věta 16.2: Jsou-li **u**, **v** ∈ $\mathbf{V}_n$, a ∈ **R**, pak platí:

(a) $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$,

(b) **u** je nenulový vektor právě tehdy, je-li $\|\mathbf{u}\| > 0$,

(c) $\|a.\mathbf{u}\| = |a|.\|\mathbf{u}\|$,

(d) je-li **u** nenulový vektor, je $\|\mathbf{u}^0\| = 1$,

(e) $|\mathbf{u}.\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$ (Schwarzova nerovnost),

při čemž platí, že $|\mathbf{u}.\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| \Leftrightarrow$ **u, v** jsou lineárně závislé,

(f) $\mathbf{u}.\mathbf{v} \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$,

(g) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (trojúhelníková nerovnost),

(h) $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \ge \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$.

Důkaz 16.2:

(a) i (b) plyne z (SS4).

(c) $\|a\mathbf{u}\| = \sqrt{((a.\mathbf{u}).(a.\mathbf{u}))} = \sqrt{a(\mathbf{u}(a\mathbf{u}))} = \sqrt{(a^2\mathbf{u}^2)} = |a|.\|\mathbf{u}\|$.

(d) $\|\mathbf{u}^0\| = \dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\|\mathbf{u}\| = 1$.

(e) Je-li $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, $k \in \mathbf{R}$, je $|\mathbf{u}.\mathbf{v}| = |(k\mathbf{v}).\mathbf{v}| = |k(\mathbf{v}.\mathbf{v})| = |k|.\|\mathbf{v}\|^2$. Vyjádříme pravou stranu: $\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| = \|k\mathbf{v}\|.\|\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|^2$. Jsou-li **u, v** lineárně nezávislé (tedy nenulové) vektory, je pro každé reálné číslo $t \in \mathbf{R}$ $(t\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 > 0$. Je tedy $t^2\mathbf{u}^2 + 2t\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}^2 > 0$, takže, dosadíme-li například $t = -\dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\mathbf{u}^2}$, bude $\dfrac{(\mathbf{u}.\mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^2.\mathbf{u}^2}.\mathbf{u}^2 - \dfrac{2(\mathbf{u}.\mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^2} + \mathbf{v}^2 > 0$ a po úpravě $-(\mathbf{u}.\mathbf{v})^2 + \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 > 0$, $|\mathbf{u}.\mathbf{v}| < \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$.

(f) $\mathbf{u}.\mathbf{v} \le |\mathbf{u}.\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$.

(g) $\mathbf{u}.\mathbf{v} \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| \Rightarrow 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \le 2\,\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| \Rightarrow \mathbf{u}^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}^2 \le \mathbf{u}^2 + 2\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| + \mathbf{v}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 \le (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \Rightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \le (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \Rightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

(h) $\|(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| \Rightarrow \|\mathbf{u}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| \Rightarrow \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \ge \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

Vřele doporučujeme, abyste si některé z vlastností (Schwarzovu a trojúhelníkovou nerovnost) vymodelovali podle obr. 16.1.

Nyní zavedeme pojem Grammův determinant a budeme zkoumat, jak souvisí Grammův determinant s lineární (ne)závislostí skupiny vektorů.

Grammův determinant pro vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}_n$ má tvar:

$$G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1.\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2 & ... & \mathbf{u}_1.\mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_2.\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2.\mathbf{u}_2 & ... & \mathbf{u}_2.\mathbf{u}_k \\ : & : & : & : \\ : & : & : & : \\ \mathbf{u}_k.\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_k.\mathbf{u}_2 & ... & \mathbf{u}_k.\mathbf{u}_k \end{vmatrix} \qquad (16.6)$$

Věta 16.3: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}_n$ jsou právě tehdy lineárně závislé, je-li

$$G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k) = 0.$$

Důkaz 16.3: Z rovnice $\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i = \mathbf{o}$ dostaneme postupným násobením vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ systém rovnic $\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i.\mathbf{u}_j = 0$, ($j$ = 1, 2,…, k). Tato soustava má nenulové řešení $a_1, a_2, ..., a_k$ právě tehdy, je-li $G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k) = 0$.

Věta 16.4: Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, je-li $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi$, nebo $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$.

Důkaz 16.4: Jsou-li vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně závislé, existuje $k \in \mathbf{R}$ tak, že $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, a tedy $\cos\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|} = \dfrac{k\mathbf{v}^2}{|k|.\|\mathbf{v}\|^2} = \pm 1$. Z druhé strany této rovnosti plyne, že je-li $\cos\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \pm 1$, je $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \pm\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| \Rightarrow (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2.\|\mathbf{v}\|^2 \Rightarrow \|\mathbf{u}\|^2.\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2 = 0$, takže $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou tedy podle věty 16.3 lineárně závislé .

Shrnutí 16

Vše, co jsme poznali o vektorech v prvním dílu, nám neumožnilo rozhodnout, jestli dva vektory jsou k sobě kolmé, či nikoliv, přičemž kolmost je přece významná vlastnost, která se v technickém světě často využívá. Nedovedli jsme tu kolmost stanovit proto, že jsme až v této kapitole zavedli pojem odchylky dvou vektorů.

Víme, že musíme rozlišit pojmy úhel a odchylka. Úhel je část roviny, odchylka je reálné číslo z intervalu $\langle 0,\ \pi \rangle$. Odchylka se vždy stanovuje pouze mezi dvěma vektory, které jsou definovány v prostoru libovolné dimenze. Vzorec (16.4) je možno si představit ve tvaru

$$\cos\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \tag{16.7}$$

z něhož je zřejmé, že kosinus odchylky dvou vektorů je roven skalárnímu součinu jejich normálových (a tedy jednotkových) vektorů. To je již zcela představitelné a je možno tuto situaci znázornit pomocí doprovodného obrázku.

Ve zbývající části jsme poznali pojem Grammův determinant a ukázali jsme si, jak souvisí s lineární závislostí skupiny *k* vektorů. Nyní dovedete jistěji z vlastností determinantů odvodit, např. kdy je každá skupina čtyř vektorů v prostoru dimenze tři lineárně závislá.

17. Kolmost vektorů

V minulé kapitole jsme, kromě jiného, mluvili o problematice spojené s pojmem „velikost úhlu“. Protože se ten pojem na školách opravdu používá (a má široké praktické uplatnění) a protože i název této kapitoly zákonitě povede k pojmu „pravý úhel“, je nejvyšší čas se touto problematikou zabývat blíže.

Významnou roli bude hrát odchylka dvou vektorů. Znovu si uvědomme, že (konvexní, tj. dutý) úhel je průnikem dvou polorovin, jejichž hraniční přímky jsou různoběžné. Podotkněme současně, že se konvexní úhel dá definovat i „nemnožinově“ jako ta část roviny, ležící mezi dvěma polopřímkami, jejichž počáteční bod je společný.

Je-li hraniční přímka poloroviny M_1 dána body R, P a hraniční přímka poloroviny M_2 dána body S, P, pak konvexní (dutý) úhel α, který je průnikem těchto polorovin, může být zapsán symbolem $\alpha = \angle RPS$. Bod P se pak nazývá vrchol úhlu α. Také si jistě pamatujete, že polopřímkám $\rightarrow PR$ a $\rightarrow PS$ říkáme ramena úhlu α. Nyní již můžeme přistoupit k definici „velikosti úhlu α“.

Definice 17.1: Mějme dán úhel α a $\rightarrow PR$, $\rightarrow PS$ nechť jsou jeho ramena. Je-li úhel α konvexní, nazýváme velikostí úhlu α odchylku vektorů $R - P$, $S - P$. Velikost konvexního úhlu α zapisujeme symbolem $v(\alpha)$. Podle této definice je možno zapsat $v(\alpha) = \angle(R - P, S - P)$.

Z definice je zřejmé, že je možno definovat také velikost nekonvexního (vypuklého) úhlu α. Jsou-li nyní $\rightarrow PR$ a $\rightarrow PS$ ramena nekonvexního úhlu α, je

$$v(\alpha) = 2\pi - \angle(R - P, S - P). \qquad (17.1)$$

Definice 17.1 v sobě skrývá jedno velké úskalí: takto nelze definovat velikost úhlu na školách, protože se v definici vyskytuje pojem odchylka vektorů, tedy pojem, který na základní škole znám není. Z definice odchylky víme, co je její kosinus, a nikoliv, co je odchylka sama, takže se stále pohybujeme v jakémsi kruhu. Z něj vedou dvě cesty:

1. Vrchol úhlu zvolíme středem kružnice o poloměru jedna. Velikost úhlu α je rovna délce kruhového oblouku, který je na jednotkové kružnici určen rameny úhlu. Je-li např. délka kruhového oblouku rovna 1,4 (cm), je velikost příslušného úhlu 1,4 (radiánů). Zapsáno $v(\alpha) = 1,4$ rad.

Na jedné straně se tento způsob zdá být jednoduchý, na druhé straně měření délek kruhového oblouku není tak zcela jednoduchá záležitost.

2. Úhel, jehož ramena jsou polopřímky opačné, nazvěme úhel přímý. Prohlásíme jeho velikost rovnou 180 (stupňů). Od této velikosti se odvozují všechny násobky.

   Je to zřejmě jednodušší způsob než ten první, ale má také své (a nemalé) problémy. Do dnešních dnů se nepodařilo prosadit dělení stupně na desetiny, setiny,…, nýbrž se stále užívá dělení stupně na 60 minut a dělení minuty (úhlové minuty) na 60 vteřin (opět je jasné, že se jedná o úhlové vteřiny nikoliv sekundy!). Ze školy jistě dobře víme, jak nám šedesátková soustava dovedla znepříjemnit život.

V dalším textu budeme vždy předpokládat, že je dán vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ se skalárním součinem.

Definice 17.2: Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ jsou <u>navzájem kolmé</u> $(\mathbf{u} \perp \mathbf{v})$ právě tehdy, když $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Možná si řeknete, proč zavádíme kolmost vektorů tak složitě pomocí skalárního součinu a proč se nedefinují kolmé vektory tak, že jejich odchylka je $\pi/2$ (rad), popř. 90°? Důvod je prostý: za chvíli se dozvíte, že výpočet skalárního součinu je v prostoru s ortonormální bází naprosto jednoduchým problémem. Je to součet součinů jejich souřadnic.

Protože pro každý vektor $\mathbf{u}$ platí $\mathbf{o}\cdot\mathbf{u} = 0$, je $\mathbf{o}$ kolmý ke všem vektorům z $\mathbf{V}_n$ (i sám k sobě). Protože pro každý nenulový vektor $\mathbf{u}$ je $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} > 0$, není žádný nenulový vektor kolmý sám k sobě.

Definice 17.3: Systém vektorů $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$ nazveme <u>ortogonální</u>, pokud je $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ pro každé dva různé indexy $i, j = 1, 2, ..., k$.

Věta 17.1: Každý ortogonální systém nenulových vektorů je lineárně nezávislý.

Důkaz 17.1: Je-li $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$ ortogonální systém vektorů ve $\mathbf{V}_n$, je

$$G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_2^2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \mathbf{u}_k^2 \end{vmatrix} = \mathbf{u}_1^2\cdot\mathbf{u}_2^2\cdot \ldots \cdot \mathbf{u}_k^2 > 0.$$ Dále viz větu 16.3.

Před chvíli jsme řekli, že výpočet skalárního součinu (a tím vlastně i odchylky dvou vektorů) je zvlášť jednoduchý v prostorech s ortonormální bází. Není divu, že se matematikové snažili vytvořit nějaký algoritmus, který by umožnil libovolnou bázi změnit na bázi, která by byla ortonormální. Stačilo by sestrojit ortogonální bázi, protože proces normalizace je už jednoduchý. Takový algoritmus byl sestrojen a je obsažen v důkazu následující věty.

Věta 17.2: Každý vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ se skalárním součinem obsahuje ortogonální systém vektorů, obsahující nejvýše n různých nenulových vektorů.

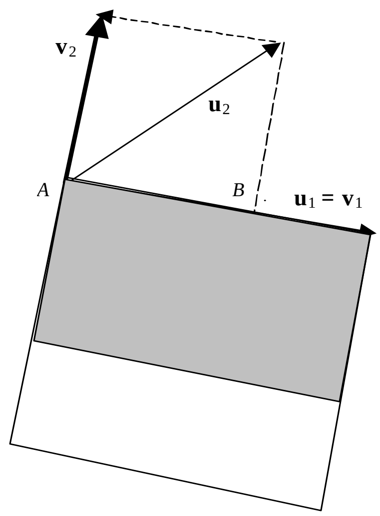
Důkaz 17.2: Je-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislý systém nenulových vektorů ve $\mathbf{V}_{\underline{n}}$, můžeme k němu sestrojit ortogonální systém vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ pomocí konstrukce, která se nazývá Schmidtův ortogonalizační proces. Ten se skládá z k kroků:

(a) Zvolíme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$,

(b) Máme-li již sestrojeny vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ (r = 1, 2, ..., k - 1), pak můžeme sestrojit vektor $\mathbf{v}_{r+1}$ takto: $$\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{u}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{u}_{r+1}.\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_i}.\mathbf{v}_i \,. \tag{17.2}$$

Jak se můžeme snadno výpočtem přesvědčit, dostali jsme tak pro r = 1, 2, 3, ..., k ortogonální systém vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$.

Aby byl tento proces stravitelnější, ukažme si jednotlivé kroky pro systém dvou vektorů. Mějme systém $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ neortogonálních vektorů a sestrojme k němu systém $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ortogonálních vektorů (viz obr. 17.1).



Obr. 17.1

1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$ + čárkovaný vektor, tj. vektor $B - A$. Ten vyjádříme jako část vektoru $\mathbf{v}_1$.

Z úměry $\dfrac{\|B-A\|}{\|\mathbf{v}_1\|} = \dfrac{\|B-A\|.\|\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|.\|\mathbf{v}_1\|} = \dfrac{\mathbf{u}_2.\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_1}$ (17.3), je možno vyjádřit vektor $B - A = \dfrac{\mathbf{u}_2.\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_1}.\,\mathbf{v}_1$.

Odkud plyne hned 1. krok Schmidtova ortogonalizačního procesu. Podobně bychom postupovali v dalších krocích.

Definice 17.4: Ortogonální báze ve $\mathbf{V}_n$ je báze prostoru $\mathbf{V}_n$, která je ortogonálním systémem. Ortonormální báze ve $\mathbf{V}_n$ je ortogonální báze prostoru $\mathbf{V}_n$, v níž je každý vektor jednotkový.

Věta 17.3: V každém vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

Důkaz 17.3: věta plyne z vět 17.2 a 16.2(d).

Počítáme-li se souřadnicemi vektorů v ortonormální bázi, máme usnadněny výpočty, které vycházejí ze skalárního součinu vektorů:

Definice 17.5: Je-li $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n>$ ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}_n$, je

$\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, (17.4), kde $\delta_{ij} = 0$ pro i různé od j, a

$\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$.

Symbol δ_{ij} se nazývá Kroneckerovo δ.

Z definice 17.5 vyplývá, že jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, je

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,. \qquad (17.5)$$

Odtud dostáváme základní početní pravidla:

Věta 17.4: Jsou-li v prostoru $\mathbf{V}_n$ dány dva vektory **x, y** svými souřadnicemi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, danými v ortonormální bázi, je:

(a) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$, (17.6)

(b) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)}$, (17.7)

(c) $\cos\angle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{((\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2))}}$ (17.8)

Ze vzorce 17.6 je vidět, jak se výpočty pro skalární součin v prostoru s ortonormální bází zjednoduší. Současně si všimneme, že Schmidtův ortogonální proces není omezen pouze na $n = 2$ a $n = 3$. Pro libovolné n lze v prostoru $\mathbf{V}_n$ sestrojit n vektorů na sebe kolmých. Samozřejmě zde už zase odpadá jakákoliv geometrická představa.

Definice 17.6: Budiž M libovolná množina vektorů prostoru $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$. Vektor **u** je kolmý na množinu M ($\mathbf{u} \perp M$) právě tehdy, platí-li pro každý vektor $\mathbf{x} \in M$ vztah $\mathbf{u} \perp \mathbf{x}$.

Definice 17.7: Ortogonální doplněk množiny M: $M^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n; \mathbf{x} \perp M\}$.

Věta 17.5: Je-li M podmnožinou vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ se skalárním součinem, pak $M^{\perp}$ je podprostorem prostoru $\mathbf{V}_n$.

Důkaz 17.5: $M^{\perp}$ je neprázdná množina, neboť $\mathbf{o} \in M^{\perp}$. Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M^{\perp}$, jsou $\mathbf{u}, \mathbf{v} \perp M$, takže pro každý vektor $\mathbf{x} \in M$ platí: $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}, \mathbf{x} \perp \mathbf{v} \Rightarrow 0 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Je tedy $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in$ $\in M^{\perp}$. Kromě toho je pro $c \in \mathbf{R}$: $0 = c(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{x}\cdot(c\mathbf{u})$, takže i $c\mathbf{u} \in M^{\perp}$.

Budeme nyní hledat metodu, jak najít vektor kolmý na libovolný podprostor. Z definice 17.2 už víme, že tento vektor bude muset být kolmý na libovolný vektor tohoto podprostoru. Situaci nám velmi zjednodušuje následující věta, která podstatným způsobem usnadňuje nalezení takového kolmého vektoru.

Věta 17.6: Budiž $\mathbf{V}_n$ vektorový prostor se skalárním součinem, $\mathbf{V}_k$ jeho podprostor. Vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ je kolmý k prostoru $\mathbf{V}_k$ právě tehdy, je-li kolmý ke všem vektorům libovolné báze prostoru $\mathbf{V}_k$. Platí tedy vztah $\dim\mathbf{V}_k + \dim\mathbf{V}_k^{\perp} = n$, pokud je $\mathbf{V}_k$ podprostorem prostoru $\mathbf{V}_n$

Důkaz 17.6: Je-li $\mathbf{u} \perp \mathbf{V}_k$, je $\mathbf{u}$ kolmý ke všem vektorům prostoru $\mathbf{V}_k$, a tedy i ke všem vektorům libovolné báze $\mathbf{V_k}$. Je-li naopak $<\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k>$ báze prostoru $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{u} \perp \mathbf{b}$, pro $i = 1, 2, \dots, k$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_k$, je $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{b}_i$, takže $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i (\mathbf{u}.\mathbf{b}_i) = 0$.

Věta 17.6 je vlastně pouze jinou interpretací tvrzení, které jsme jako středoškolští studenti několikrát opakovali: „Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny.“ Vzpomínáte?

Věta 17.7: Je-li $\mathbf{V}_k$ podprostorem $\mathbf{V}_n$, je dim $\mathbf{V}_k^{\perp} = n - k$.

Důkaz 17.7: Je-li $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k>$ ortogonální báze $\mathbf{V}_k$, lze ji podle věty 17.2 doplnit na ortogonální bázi $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_{n-k}>$ prostoru $\mathbf{V}_n$. Protože je $\mathbf{f}_j \perp \mathbf{e}_i$ pro $i = 1, 2, ..., k$, $j = 1, 2, ..., n - k$, jsou $\mathbf{f}_j \perp \mathbf{V}_k$ podle věty 17.6, a tedy $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_{n-k} \in \mathbf{V}_k^{\perp}$. Protože jsou tyto vektory lineárně nezávislé, tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}_k^{\perp}$.

Věta 17.8: Je-li $\mathbf{V}_k$ podprostorem $\mathbf{V}_n$, jsou podprostory $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}_k^{\perp}$ totálně nezávislé.

Důkaz 17.8: Věta plyne z věty 17.7 a z toho, že $\mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_k^{\perp} = \mathbf{o}$.

Definice 17.8: Podprostory $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}_k^{\perp}$ nazveme <u>totálně kolmými podprostory ve $\mathbf{V}_n$</u>.

Definice 17.9: Mějme dány dva podprostory $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}_r$ prostoru $\mathbf{V}_n$ a nechť:

(a) $k + r < n$. Pak $\mathbf{V}_k \perp \mathbf{V}_r$ právě tehdy, je-li $\mathbf{V}_r$ podprostorem prostoru $\mathbf{V}_k^{\perp}$ (je-li prostor $\mathbf{V}_k$ podprostorem prostoru $\mathbf{V}_r^{\perp}$).

(b) $k + r = n$. Pak $\mathbf{V}_k \perp \mathbf{V}_r$ právě tehdy, je-li $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_k^{\perp}$ ($\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_r^{\perp}$).

(c) $k + r > n$. Pak $\mathbf{V}_k \perp \mathbf{V}_r$ právě tehdy, je-li $\mathbf{V}_k^{\perp}$ podprostorem prostoru $\mathbf{V}_r$, nebo také, je-li $\mathbf{V}_r^{\perp}$ podprostorem prostoru $\mathbf{V}_k$.

Shrnutí 17

Poznali jste rozdíl mezi pojmy <u>úhel</u> a <u>velikost úhlu</u>. Ve školské matematice se někdy rozdíl v pojmech nezdůrazňuje, takže se zavádí např. relace „být menší“ přímo pro úhly, a nikoliv pro jejich velikosti. Velikosti úhlů se vyjadřují v radiánech nebo ve stupních, každé z uvedených vyjádření má své výhody i nedostatky.

Základní pojem kapitoly je kolmost dvou vektorů. Tento pojem se postupně rozšiřuje na více vektorů, čímž získáme ortogonální systém vektorů. Takovou ortogonalizaci lze provést vždy, návod k tomu dává Schmidtův ortogonalizační proces.

Následující úvahy směřovaly k poznatku, že v každém vektorovém prostoru se skalárním součinem lze zavést ortonormální systém vektorů, přičemž v prostoru dimenze n může existovat maximálně n ortonormálních vektorů, které jsou lineárně nezávislé, a tedy mohou tvořit bázi. V takových prostorech se podstatně zjednoduší výpočet skalárního součinu, a tím i další výpočty. Situaci zachycují vzorce 17.6, 17.7 a 17.8.

Pojem kolmost vektorů jsme rozšířili na vektor kolmý k množině vektorů, a zejména na případ, kdy je tato množina vektorů zaměřením nějakého podprostoru. Dále jsme dospěli k totálně nezávislým prostorům, které mají společný pouze nulový vektor.

Posledním sledovaným pojmem je kolmost dvou podprostorů, který podrobně podává definice 17.9. Na základě tohoto pojmu se ve škole např. definuje kolmost dvou rovin (jestliže jedna rovina obsahuje přímku, která je kolmá ke dvěma různoběžným přímkám, ležících ve druhé rovině).

18. Vektorový součin

Když si přečtete názvy kapitoly 18. a 19., budete přesvědčeni o tom, že si matematikové vymysleli další typy součinů jen proto, aby mohli potrápit nebohé studenty. Ujišťujeme vás, že tomu tak není a že tyto pojmy mají svá konkrétní uplatnění.

V této kapitole poznáte konstrukci vektoru, který má tu vlastnost, že je kolmý na dva předem dané vektory, tvoří s nimi kladnou bázi a má zcela určitou velikost. Tento vektor je tedy touto dvojicí vektorů určen jednoznačně a jeho konstrukce je v prostoru $\mathbf{V}_3$ velmi jednoduchá.

Zdůrazněme hned v úvodu, že v této kapitole se omezíme pouze na prostor $\mathbf{V}_3$. Matematická teorie zná dokonce postup, jímž je možno sestrojit k n - 1 vektorům z prostoru $\mathbf{V}_n$ vektor, který je kolmý ke všem daným vektorům, ale největší praktické využití má právě konstrukce ve $\mathbf{V}_3$. Samozřejmě si všimneme i vynikajících praktických aplikací.

Mějme dánu ve $\mathbf{V}_3$ bázi $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ a v ní dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ libovolný vektor ve $\mathbf{V}_3$ a označme

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\mathbf{x}). \qquad (18.1)$$

Sestrojme $\mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{x} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \end{vmatrix}$.

Pak
$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{x} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1^2+u_2^2+u_3^2 & u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 & u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 \\ v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3 & v_1^2+v_2^2+v_3^2 & v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 \\ x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3 & x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3 & x_1^2+x_2^2+x_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{pmatrix}\right] = \det\,(\mathbf{U}(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}) = \det \mathbf{U}(\mathbf{x}) \cdot \det \mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}} = \det\,(\mathbf{U}(\mathbf{x}))^2 .$$

Dostáváme tedy $|\det \mathbf{U}(\mathbf{x})| = \sqrt{\mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})}$.

Označme dále U_i algebraický doplněk k prvku x_i v $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ a vektor

$$\mathbf{w} = (U_1, U_2, U_3) \qquad (18.2)$$

Pak je $\det(\mathbf{U}(\mathbf{x})) = x_1U_1 + x_2U_2 + x_3U_3 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{w}$. Jelikož $\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} = \det\,(\mathbf{U}(\mathbf{x}))$, pak

$$|\mathbf{x}.\mathbf{w}| = |\det(\mathbf{U}(\mathbf{x}))| = \sqrt{\mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})} \qquad (18.3)$$

Je-li $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ nebo $\mathbf{x} = \mathbf{v}$, jsou v $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ dva řádky stejné, a tedy $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = 0$ a zároveň $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0$. Vektor **w** je tedy kolmý na oba vektory **u** a **v**. Podle (18.3) dostaneme, dosadíme-li za $\mathbf{x} = \mathbf{w}$,

$$(\mathbf{w}^2)^2 = \mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}^2 & \mathbf{uv} & 0 \\ \mathbf{uv} & \mathbf{v}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}^2 \end{vmatrix} = \mathbf{w}^2\cdot\mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \text{ Je tedy } \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}\,. \qquad (18.4)$$

Definice 18.1: Vektor **w** nazveme vektorovým součinem vektorů **u** a **v** a označíme ho symbolem $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Věta 18.1: Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_3$ se skalárním součinem existuje ke každé uspořádané dvojici vektorů **u**, **v** jejich vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, který má tyto vlastnosti:

a) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$,

b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ právě tehdy, když jsou vektory **u** a **v** lineárně závislé,

c) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} \perp \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}\times\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$,

d) jsou-li **u**, **v** lineárně nezávislé, je $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\rangle$ kladná báze.

Důkaz 18.1:

a) Plyne bezprostředně z předcházejícího textu.

b) Je důsledkem ad a) a vět 16.2 a) a 16.3.

c) Již bylo dokázáno v předcházejícím textu.

d) Jsou-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektory vyjádřené v kladné ortonormální bázi $\langle\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$, je matice přechodu od této báze k bázi $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\rangle$ rovna $\mathbf{U}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Vzhledem k tomu, že $\det(\mathbf{U}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v})) = \sum_{i=1}^{3} U_i^2 > 0$, je báze $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\rangle$ kladná. Je-li báze prostoru $\mathbf{V}_3$ $\langle\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$, je podle (18.1) a (18.2)

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} \\ \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \\ \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{vmatrix}. \qquad (18.5)$$

V tomto okamžiku jsme vlastně již splnili vše, co jsme slíbili v úvodním odstavci: sestrojit vektor **w**, který bude kolmý na dva libovolné vektory ve $\mathbf{V}_3$, bude s nimi tvořit kladnou bázi a bude mít zcela určitou velikost. Velikost vektoru **w** je dána vzorcem 18.4 a je dán vztahem 18.5. V následujícím textu si uvedeme některé vlastnosti vektorového násobení „×“.

Věta 18.2: . Pro každé tři vektory **u**, **v**, **w** $\in$ $\mathbf{V}_3$ a pro každé $c \in$ **R** platí:

a) $(c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$,

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$,

c) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$,

d) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Důkaz 18.2: Vlastnosti vyplývají z vlastností determinantů

a) $$\begin{vmatrix} cu_1 & cu_2 & cu_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cu_2 & cu_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} cu_3 & cu_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} cu_1 & cu_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 = \ldots..$$

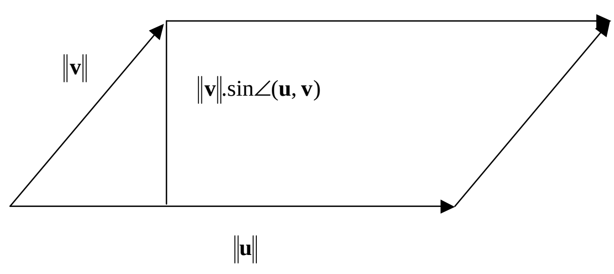
b) $$\begin{vmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} u_3+v_3 & u_1+v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$

c) Zaměníme-li v determinantu dva řádky, změní determinant znaménko.

d) $$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{\mathrm{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \sqrt{(\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2} = \sqrt{(\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2(1 - \frac{(\mathbf{u}.\mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2})} =$$

$$= \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sqrt{1 - \cos^2\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Vztah d) ve větě 18.2 je možno geometricky interpretovat jako obsah rovnoběžníku, jehož strany jsou dva geometrické vektory **u**, **v** (viz obr. 18.1). Je-li odchylka obou vektorů nulová, je sin$\angle$(**u**, **v**) roven nule a vektorový součin těchto dvou vektorů je nulový vektor.



Obr.18.1

Shrnutí 18

Kromě skalárního součinu dvou vektorů, jehož výsledkem je skalár, tedy číslo, zná geometrie i vektorový součin dvou vektorů, jehož výsledkem, jak je z názvu zřejmé, je vektor. Vektorový součin nelze sestrojit v prostorech $\mathbf{V}_1$, ani $\mathbf{V}_2$. Musí být $n \geq 3$.

V celé kapitole jsme se zabývali pouze prostory $\mathbf{V}_3$. Zatímco Schmidtův ortogonální proces by nám umožnil sestrojit vektor **w** kolmý na vektory **u** a **v,** které jsou ale také na sebe kolmé, vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý na libovolné vektory **u** a **v**, tvoří s nimi kladnou bázi (čili jeho orientaci je možné stanovit tzv. pravidlem pravé ruky, tj. prsty naznačují otáčení od **u** k **v** a palec znázorňuje směr vektorového součinu $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$).

Velikost vektorového součinu závisí nejen na velikostech vektorů **u** a **v**, nýbrž i na jejich odchylce. Jsou-li **u**, **v** lineárně závislé (odchylka je 0 nebo π), je vektorový součin nulový vektor. Geometricky znamená velikost vektorového součinu obsah rovnoběžníku, jehož strany jsou dva dané vektory.

19. Smíšený součin tří vektorů ve V_3

Poznali jsme už skalární a vektorový součin. V tomto článku zůstaneme zase pouze ve $\mathbf{V}_3$, což je jisté omezení, na druhou stranu poznáme v tomto prostoru zajímavé aplikace, k nimž vede další ze zavedených součinů, a to smíšený součin. Už název tohoto součinu napovídá, že smíšený součin vektorů bude zřejmě složen ze skalárního a vektorového součinu. Cílem tohoto článku je zavedení smíšeného součinu, poznání jeho vlastností a pochopení zajímavých aplikací.

Definice 19.1: Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_3$ mějme dánu ortonormální bázi a v ní souřadnice tří vektorů $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$, pro $i = 1, 2, 3$. Smíšený součin vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ je zobrazení f: $\mathbf{V}_3^3 \to \mathbf{R}$, které označujeme symbolem $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ a které definujeme vztahem

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} \tag{19.1}$$

Věta 19.1:. Mějme dán vektorový prostor $\mathbf{V}_3$ nad $\mathbf{R}$ a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_3$. Smíšený součin $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ má následující vlastnosti

a) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$,

b) $\left|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\right| = \left|\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).\cos\angle(\mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})\right|$.

Důkaz 19.1:

a) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3$

Ale $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$

Z toho plyne, že $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

b) $\left|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\mathbf{w}\right| = \left|\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \cos\angle(\mathbf{w}, (\mathbf{u} \times \mathbf{v}))\right| = \left|\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|.\sin\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).\|\mathbf{w}\|.\cos\angle(\mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})\right|$.

Najděte na obrázku 19.1 geometrický význam těchto výrazů:

a) $\|\mathbf{v}\|.\sin\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$

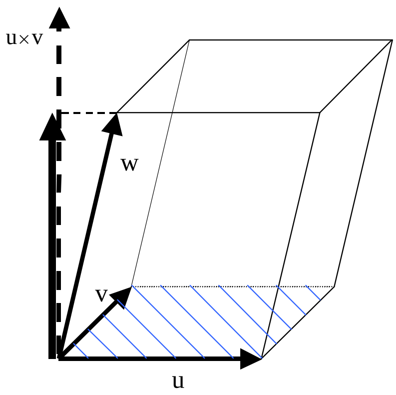
b) $\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|.\sin\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$

c) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

d) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$

e) $\|\mathbf{w}\|.\cos\angle(\mathbf{w},\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

f) $\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|.\sin\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}).\|\mathbf{w}\|.\cos\angle(\mathbf{w},\mathbf{u}\times\mathbf{v})$



Obr. 19.1

Pokud jste správně odpověděli na všechny body, dospěli jste jistě k poznatku, že výraz f), který je podle věty 19.1b smíšený součin vektorů **u**, **v**, **w**, představuje v absolutní hodnotě objem rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou vektory **u**, **v**, **w**. Proveďte nyní tuto myšlenkovou úvahu: sklápějte vektor **w** postupně do roviny určené vektory **u** a **v**. Jak se bude měnit smíšený součin těchto tří vektorů? Pokud sklopíte vektor **w** do roviny určené vektory **u** a **v**, jaká bude velikost smíšeného součinu těchto tří vektorů? Nyní již můžete přistoupit k dalšímu odbornému textu.

Věta 19.2:. Mějme dán $\mathbf{V}_3$ nad **R** a vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ z tohoto prostoru. Smíšený součin má následující vlastnosti:

a) $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ jsou lineárně závislé, právě když $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = 0$,

b) $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]^2 = G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$,

c) $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$,

d) $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = -[\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3] = -[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2] = -[\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1]$,

e) $[k\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, k\mathbf{u}_3] = k[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$,

f) $[\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ a všechny další možnosti.

Důkaz 19.2:

Všechny uvedené vlastnosti se dokáží z vlastností determinantů.

Shrnutí 19

Smíšený součin tří vektorů ve $\mathbf{V}_3$ je reálné číslo. Je-li dána ve $\mathbf{V_3}$ ortonormální báze, pak v řádcích tohoto determinantu jsou postupně souřadnice jednotlivých vektorů. Už z toho je zřejmé, že na pořadí vektorů záleží. Číselně je hodnota tohoto determinantu rovna objemu rovnoběžnostěnu, jehož strany jsou dané vektory (stále musíme zachovávat pořadí vektorů, neboť z algebry je známo, že zaměníme-li v determinantu dva řádky, změní se znaménko).

Jsou-li vektory **u**, **v**, **w** lineárně závislé (tj. leží-li v jedné rovině), je objem toho rovnoběžnostěnu roven nule, tedy i smíšený součin tří vektorů je roven nule. Tohoto případu se využívá při zápisu rovnice roviny, která prochází daným bodem a zaměření dané dvěma nezávislými vektory. Vlastnosti smíšeného součinu jsou uvedeny ve dvou větách a skoro všechny lze z geometrické představy pochopit.

20. Euklidovské prostory

Musíme přiznat, že naše znalosti z geometrie jsou stále dost malém, protože neumíme vyřešit jeden ze základních geometrických problémů, a to stanovit vzdálenost mezi dvěma body. Dokud nebudeme umět vyřešit tento problém, nemůžeme řešit problémy složitější: nalézt vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost dvou mimoběžek atd.

V této kapitole poznáme prostor, kde dovedeme stanovit vzdálenost libovolných bodů. Protože u vzdáleností hraje významnou úlohu kolmost, povíme si i o ní více, než bylo řečeno v předchozích kapitolách. Začneme definicí funkce, která pro stanovení vzdálenosti hraje zásadní úlohu.

Věta 20.1: Je-li M libovolná množina, pak metrikou na množině M budeme nazývat každé zobrazení $\mu : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathbf{R}$, které má vlastnosti:

(M1) $\mu(x, y) \geq 0$,

(M2) $\mu(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M3) $\mu(x, y) = \mu(y, x)$,

(M4) $\mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(y, z)$.

pro všechny prvky $x, y, z \in M$. Metrický prostor **M** je uspořádaná dvojice $<\mathrm{M}, \mu>$, kde μ je metrika na množině M.

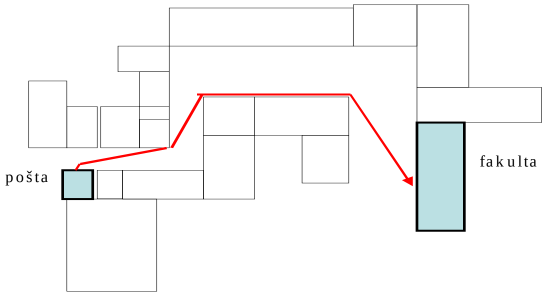
Důkaz 20.1:

(M1), (M2): viz větu 16.2(a), (b).

(M3): Z věty 16.2(c) plyne: $|XY| = \|Y - X\| = \|-(X - Y)\| = \|X - Y\| = |YX|$.

(M4): $|\mathrm{XY}| = \|Y - X\| = \|(Y - Z) + (Z - X)\| \leq \|Y - Z\| + \|Z - X\| = |YZ| + |XZ|$, $Z \in \mathrm{A}$.

K pochopení pojmu metrika řešme následující úlohu: Poštovní doručovatelka nese zásilku z pošty na fakultu. Co je pro ni vzdáleností těchto dvou budov? Podívejme se na obr. 20.1.



Obr. 20.1

Nejkratší možná cesta z pošty na fakultu je na obrázku vyznačena 20.1. I když všichni víme, že tímto způsobem nelze ulice přecházet, z matematického hlediska lze říci, že délka vyznačené cesty je μ(pošta, fakulta).

Kdybychom zvolili nějaký bod Z mimo vyznačenou trajektorii, byla by cesta z pošty na fakultu delší než cesta vyznačená na obrázku. Z tohoto názoru je možno pochopit všechny čtyři vlastnosti metriky. V geometrii, kde nám při „cestování“ nestojí v cestě žádné budovy ani jiné překážky, můžeme vzdálenost dvou bodů definovat následujícím způsobem.

Definice 20.1: Je-li $\mathbf{A}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$ > a je-li na $\mathbf{V}_n$ definován skalární součin, pak zobrazení $\mu: A \times A \to \mathbf{R}$, definované pro všechny body $X, Y \in$ A takto:

$$|XY| = \mu(X,Y) = \|Y - X\| \qquad (20.1)$$

je metrika na množině A.

Zápis 20.1 říká, že vzdálenost bodů X, Y, tj. $\mu(X, Y)$, je velikost vektoru, jehož počáteční bod je bod X a koncový bod je bod Y.

Definice 20.2: Euklidovský prostor $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$> je afinní prostor, na jehož zaměření $\mathbf{V}_n$ je definován skalární součin a na jehož nositelce A je definována metrika vztahem (20.1).

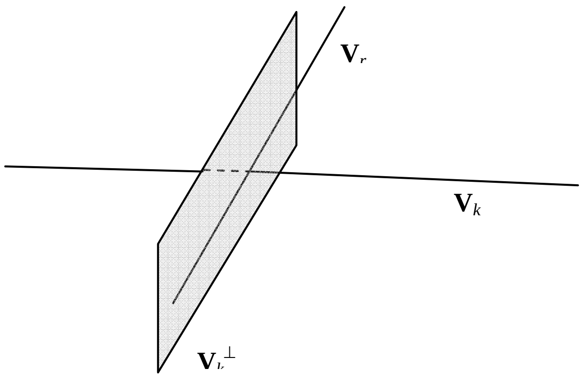
Definice 20.3: Kartézský souřadnicový systém <P, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$> je souřadnicový systém, v němž souřadnicové vektory tvoří ortonormální systém vektorů ve $\mathbf{V}_n$.

Z uvedeného plyne, že v eukleidovských prostorech je možné stanovit jak vzdálenost dvou bodů, tak odchylku dvou vektorů. To už je docela dobrá výbava pro různé výpočty. Řekli jsme již v úvodu, že při stanovování vzdáleností budeme potřebovat zjistit kolmé směry. O problematice kolmosti se dovíte více v následujícím textu.

Definice 20.4: Mějme dány dva podprostory $\mathbf{E}_k$ = <B, $\mathbf{V}_k$>, $\mathbf{E}_r$ = <C, $\mathbf{V}_r$> euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$. <u>Prostory $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}_r$ jsou na sebe kolmé</u> ($\mathbf{E}_k \perp \mathbf{E}_r$) právě tehdy, jsou-li na sebe kolmá jejich zaměření ($\mathbf{V}_k \perp \mathbf{V}_r$).

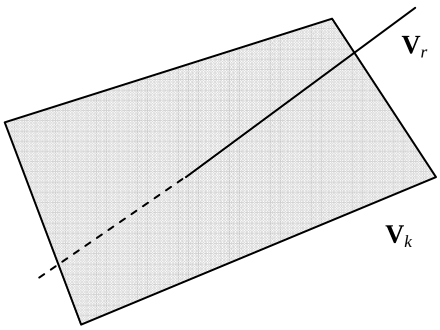
Problém kolmosti dvou vektorových podprostorů je řešen v článku 17., konkrétně se tento pojem definuje v definici 17.9. Pro n = 3 si můžeme kolmost dvou podprostorů ukázat na následujících obrázcích:

1. $k + r < 3 \Rightarrow \mathbf{V}_r \subset \mathbf{V}_k^{\perp}$. Konkrétní situaci modelují dvě přímky v prostoru.



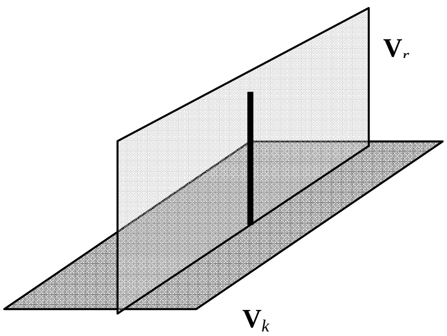
Obr. 20.2

2. $k + r = 3 \Rightarrow \mathbf{V}_r = \mathbf{V}_k^{\perp}$. Konkrétní situaci modelují rovina a přímka (nebo opačně).



Obr. 20.3

3. $k + r > 3 \Rightarrow \mathbf{V}_k^{\perp} \subset \mathbf{V}_r$. Konkrétní situaci modelují dvě roviny.



Obr. 20.4

Definice 20.5: <u>Prostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}_r$ jsou na sebe totálně kolmé</u> ($\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_r^{\perp}$ nebo $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_k^{\perp}$) právě tehdy, jsou-li na sebe totálně kolmá jejich zaměření.

V nejrůznějších úlohách se vyskytují rovnice rovin. V nich hraje významnou roli vektor, který je k té konkrétní rovině kolmý. V následujícím textu bude tento vektor definován.

Definice 20.6: <u>Normálový vektor nadroviny α</u> je vektor $\mathbf{n}$ takový, že $[\mathbf{n}]$ je totálně kolmý k zaměření nadroviny α.

Věta 20.2: Je-li $\mathbf{E}_k = \langle B, \mathbf{V}_k \rangle$ podprostor prostoru $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, $M \in A$, pak bodem M prochází právě jeden prostor $\mathbf{E}_k^{\perp}$, totálně kolmý k prostoru $\mathbf{E}_k$. Je-li $\mathbf{E}_k^{\perp} = \langle C, \mathbf{V}_k^{\perp} \rangle$, existuje právě jeden bod $M^* \in A$ takový, že $M^* = B \cap C$.

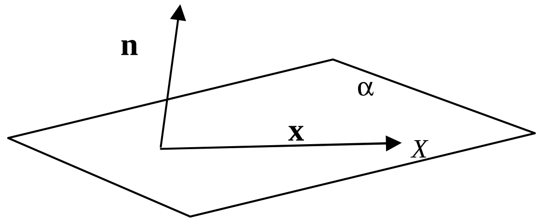
Důkaz 20.2: Platí $C = M + \mathbf{V}_k^{\perp}$ a podle věty 17.7 $\dim \mathbf{E}_k^{\perp} = n - k$. Podle věty 11.5 je $k + (n - k) = \dim(\mathbf{E}_k \cap \mathbf{E}_k^{\perp}) + n$, takže $\dim(\mathbf{E}_k \cap \mathbf{E}_k^{\perp}) = 0$.

Definice 20.6: Bod M^*, sestrojený ve větě 20.2, se nazývá <u>pravoúhlý (ortogonální) průmět bodu M do prostoru $\mathbf{E}_k$</u>.

Věta 20.3: Je-li α: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a = 0$ nadrovina v $\mathbf{E}_n$, daná rovnicí v kartézském souřadnicovém systému, je $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ normálový vektor nadroviny α.

Důkaz 20.3: Rovnice zaměření nadroviny α je $\mathbf{n.x}$ $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a = 0$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je libovolný vektor zaměření nadroviny α. Je tedy $\mathbf{n} \perp \mathbf{x}$.

Pro $n = 3$ dostaneme známý obrázek 20.5 ze střední školy.



Obr. 20.5

Věta 20.4: Dva podprostory $\mathbf{E}_k = \langle B, \mathbf{V}_k \rangle$, $\mathbf{E}_r = \langle C, \mathbf{V}_r \rangle$ euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, jestliže při:

1. $k + l < n$ existuje podprostor totálně kolmý k $\mathbf{E}_k$, v němž leží $\mathbf{E}_r$,
2. $k + l = n$ je $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_k^{\perp}$,
3. $k + l > n$ existuje podprostor totálně kolmý k $\mathbf{E}_k$, který je podprostorem $\mathbf{E}_r$.

Důkaz 20.4: Věta plyne přímo z definice navzájem kolmých podprostorů prostoru $\mathbf{E}_n$.

Příklady v $\mathbf{E}_3$:

- Dvě přímky v $\mathbf{E}_3$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, existuje-li rovina kolmá k jedné přímce a obsahující druhou přímku.
- Přímka v $\mathbf{E}_3$ je kolmá k rovině právě tehdy, je-li na rovinu totálně kolmá.
- Dvě roviny v $\mathbf{E}_3$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, obsahu- je-li jedna z nich přímku, kolmou ke druhé rovině.
- Pravoúhlý průmět bodu na přímku sestrojíme, vedeme-li bodem rovinu, kolmou k dané přímce. Její průsečík s danou přímkou je hledaný průmět.

Věta 20.5: Jsou-li $\mathbf{E}_k = \langle B, \mathbf{V}_k \rangle$, $\mathbf{E}_r = \langle C, \mathbf{V}_r \rangle$ dva podprostory euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, přičemž $k, r > 0$, $2 \leq k + r \leq n$, jsou oba prostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}_r$ buď mimoběžné, nebo mají společný právě jeden bod.

Důkaz 20.5: Podle věty 20.4 je $\mathbf{E}_r$ podprostorem prostoru $\mathbf{E}_k^{\perp}$. Podle věty 20.2 je $\mathbf{E}_k \cap \mathbf{E}_k^{\perp} = M \in A$. Je-li $M \in C$, je $M \in B \cap C$, není-li $M \in C$, jsou prostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}_r$ mimoběžné.

K pochopení věty a jejího důkazu si modelujme situaci v $\mathbf{E}_3$. Podmínka $k, r > 0$ znamená, že žádný podprostor není nulový (nositelka obsahuje jediný bod, zaměření obsahuje jediný vektor, a to vektor nulový). Tyto podprostory ze svých úvah vylučujeme.

Pro $k + r = 2$ si představíme dvě přímky v prostoru. Ty buď mají jeden společný bod (jsou různoběžné), nebo nemají společný bod (jsou rovnoběžné, nebo mimoběžné).

Pro $k + r = 3$ si představíme přímku a rovinu.

Věta 20.6: Je-li α nadrovinou v $\mathbf{E}_n$, $M \in \alpha$, $\mathbf{n}$ normálový vektor nadroviny α, pak libovolný bod $X \in \alpha$ vyhovuje rovnici

$$\mathbf{n} \cdot (X - M) = 0. \qquad (20.2)$$

Důkaz 20.6: Věta plyne z toho, že $X - M \perp \mathbf{n}$.

Shrnutí 20

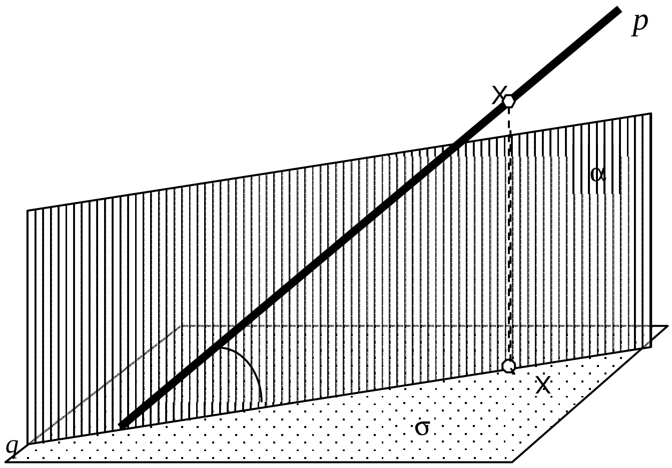
V této kapitole jsme zavedli Euklidovský prostor. První jsme definovali výchozí funkci metrika. Dále jsme upřesnili kartézský souřadnicový systém, který má také široké využití na základní škole. Následujícím důležitým pojmem byl ortogonální průmět bodu do prostoru.

Na závěr jsme se podrobně zabývali všemi případy, kdy na sebe mohou být dva podprostory euklidovského prostoru kolmé.

21. Ortogonální průmět přímky do podprostoru

Geometrie často řeší úlohy spojené s problematikou odchylek přímek od rovin. Tyto úlohy vedly k řešení obecnějšího problému, a to stanovení odchylky přímky od podprostoru. Úspěšnost jeho řešení závisí na schopnosti najít ortogonální průmět bodu do roviny, popř. obecněji do podprostoru.

Ze střední školy víme, že odchylka přímky *p* od roviny σ se stanoví tak, že danou přímkou proložíme rovinu α kolmou k rovině σ. Průsečnici těchto dvou rovin označme *q*. Odchylka přímky *p* od roviny σ je odchylka přímek *p* a *q*. Vše je názorně vidět na obrázku 21.1. Přímka *q* jen na tomto obrázku ortogonálním (pravoúhlým) průmětem přímky *p* do roviny σ. Na přímce *p* je zvolen bod *X* a sestrojen jeho ortogonální průmět X^* do roviny σ.



Obr. 21.1

Pojďme se nyní na tuto problematiku podívat obecněji:

Definice 21.1: Budiž $\mathbf{E}_k$ = <B, $\mathbf{V}_k$> podprostor prostoru $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$>, M podmnožina množiny A. <u>Ortogonální průmět M* množiny M do podprostoru $\mathbf{E}_k$</u> je množina všech takových bodů $X^* \in$ B, pro něž existuje bod $X \in$ M tak, že X^* je ortogonálním průmětem bodu *X* do prostoru $\mathbf{E}_k$.

Věta 21.1:

a) Ortogonálním průmětem přímky *p* do podprostoru $\mathbf{E}_k$ = <B, $\mathbf{V}_k$> prostoru $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$> je bod, je-li $p \perp \mathbf{E}_k$, nebo přímka, která je průnikem podprostoru kolmého k prostoru $\mathbf{E}_k$ s prostorem $\mathbf{E}_k$ a procházejícího přímkou *p*.

b) Je-li přímka p rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$, je rovnoběžná i se svým ortogonálním průmětem do prostoru $\mathbf{E}_k$.

Důkaz 21.1:

a) Budiž dána přímka p: $X = M + t\mathbf{u}$ a hledejme její ortogonální průmět p^* do prostoru $\mathbf{E}_k$. Je-li $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_k^{\perp}$, je $p \perp \mathbf{E}_k$ a $M^* = (M + \mathbf{V}_k^{\perp}) \cap$ B je ortogonálním průmětem bodu M do $\mathbf{E}_k$. Protože však p je podmnožinou množiny M + $\mathbf{V}_{\boldsymbol{k}}^{\perp}$, je $p^* = M^*$.

Pokud $\mathbf{u} \notin \mathbf{V}_k^{\perp}$, je $\dim(M + (\mathbf{V}_k^{\perp} \vee [\mathbf{u}]) = n - k + 1$.

Prostor $\mathbf{E}_{n-k+1} = <M + (\mathbf{V}_k^{\perp} \vee \quad \vee [\mathbf{u}]), \mathbf{V}_k^{\perp} \vee [\mathbf{u}]>$ obsahuje p a je $\mathbf{E}_{n-k+1} \perp \mathbf{E}_k$. Neboť je $(n - k + 1) + k = n + 1 > n$, je $\dim(\mathbf{E}_k \vee \mathbf{E}_{n-k+1}) = n$, a tedy $\dim(\mathbf{E}_{n-k+1} \cap \mathbf{E}_k) = n - k + 1 + k - n = 1$, takže $\mathbf{E}_{n-k+1} \cap \mathbf{E}_k = p^*$ je přímka, pro níž platí:

(α) Je-li $N \in p$, N^* jeho ortogonální průmět do $\mathbf{E}_k$, je $N^* - N \in \mathbf{V}_k^{\perp}$, takže $N^* \in \mathbf{E}_{n-k+1}$, a tedy $N^* \in p^*$.

(β) Je-li $P \in p^*$, je $P = M^* + r(N^* - M^*)$, $(r \in \mathbf{R})$, neboť podobně jako bod N^* v (α), je také $M^* \in p^*$. Pak je bod $Q = M + r(N - M)$ bodem přímky p a je $P - Q = (M^* - M) + r[(N^* - N) - (M^* - M)] = (1 - r)(M^* - M) + r(N^* - N)$, takže $P - Q \in \mathbf{V}_k^{\perp}$ a $P = Q^*$ je tedy ortogonálním průmětem bodu Q do $\mathbf{E}_k$.

b) Je-li p $\parallel$ $\mathbf{E}_k$, je $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_k$. Označme $N = M + \mathbf{u}$, $N' = M^* + \mathbf{u}$. Je $N \in p$, $M^* \in p^*$, $N' - N = M^* - M$, takže $N' - N \perp \mathbf{E}_k$, a tedy $N' = N^*$. Proto je $N^* - M^* = \mathbf{u}$ a $p^* \parallel p$.

Shrnutí 21

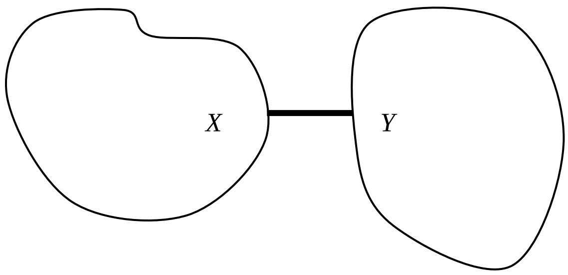
Stanovit <u>ortogonální průmět přímky *p* do podprostoru</u> potřebujeme zejména proto, abychom dovedli stanovit odchylku té přímky od uvažovaného podprostoru. Přímkou p proložíme podprostor (přímku nebo rovinu) kolmý k danému podprostoru a stanovíme průnik těchto podprostorů (v trojrozměrném prostoru to může být bod nebo přímka).

Věta 21.1 pak říká, že tím pravoúhlým průmětem přímky do podprostoru je bod nebo přímka.

22. Vzdálenost podprostorů v E$_n$

Výpočet vzdálenosti dvou geometrických útvarů je častý geometrický problém. Omezíme se pouze na vzdálenost dvou podprostorů (takže neřešíme např. problém vzdálenosti přímky od kružnice a podobné problémy). Protože nositelky afinních prostorů jsou bodové množiny, bude nutné začít pojmem vzdálenosti dvou podmnožin. Intuitivně chápeme tento pojem jako nejkratší možná vzdálenost mezi body, z nichž každý leží v jiné bodové množině. Připojený obrázek 22.1 naší intuitivní představu ještě upřesňuje.

Chyba!



Obr. 22.1

Přejděme k definici pojmu vzdálenost dvou bodových podmnožin. Definice musí odrážet skutečnost, aby vzdálenost těch dvou nakreslených bodových množin byla rovna velikosti úsečky, která je na obrázku znázorněna tlustou čarou.

Definice 22.1: Vzdálenost dvou podmnožin M, N nositelky A prostoru $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ (značíme $|MN|$) definujeme takto: $|MN| = \min |XY|$, $X \in M$, $Y \in N$.

Z definice 20.2 euklidovského prostoru plyne:

Věta 22.1: Jsou-li X, Y dva body euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, přičemž v některém kartézském souřadnicovém systému prostoru $\mathbf{E}_n$ je $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$, je

$$|XY| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad (22.1)$$

Důkaz 22.1: Z definice metriky 20.1 na euklidovském prostoru plyne vzorec 22.1.

Začneme u nejjednoduššího případu. Jedním podprostorem bude tzv. nulový podprostor, tj. podprostor, jehož nositelka obsahuje jediný bod a jehož zaměření obsahuje jediný vektor, a to vektor nulový. V následující větě se už mluví přímo o vzdálenosti bodu a podprostoru.

Věta 22.2: Je-li $\mathbf{E}_k$ = <B, $\mathbf{V}_k$> podprostor prostoru $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$> a $M \in$ A, M^* ortogonální průmět bodu M do $\mathbf{E}_k$, je $|M\mathbf{E}_k| = |MM^*|$.

Důkaz 22.2: Budiž $P \in$ B. Pak je $M - P = (M - M^*) + (M^* - P)$, kde $(M - M^*) \perp (M^* - P)$. Odtud dostaneme: $|MP|^2 = \|M - P\|^2 = \|(M - M^*) + (M^* - P)\|^2 = (M - M^*)^2 + 2(M - M^*)\cdot(M^* - P) + (M^* - P)^2 = \|(M - M^*)\|^2 + \|M^* - P\|^2 \geq \|(M - M^*)\|^2 = |MM^*|^2$, takže $|MP| \geq |MM^*|$. Zde platí vzhledem k vlastnostem metriky z odstavce 20. rovnítko právě tehdy, je-li $P = M^*$.

Věta 22.3: Je-li v $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$> dána nadrovina α rovnicí $\mathbf{n}\cdot(X - P) = 0$, kde $P \in \alpha$, a bod $M \in$ A, je

$$|M\alpha| = \left|\frac{\mathbf{n}\cdot(M-P)}{\|\mathbf{n}\|}\right|. \tag{22.2}$$

Důkaz 22.3: Veďme bodem M kolmici k k nadrovině α a sestrojme bod $M^* = k \cap \alpha$. Pro něj platí: $\mathbf{n}\cdot(M^* - P) = 0$ a $M^* = M + t\mathbf{n}$. Odtud dostaneme postupně:

$$\mathbf{n}\cdot((M - P) + t\mathbf{n}) = 0,$$

$$\mathbf{n}\cdot(M - P) + t\mathbf{n}^2 = 0,$$

$$t = -\frac{\mathbf{n}\cdot(M-P)}{\mathbf{n}^2},$$

$$M^* = M - \frac{\mathbf{n}\cdot(M-P)}{\mathbf{n}^2}\,\mathbf{n}$$

a tedy

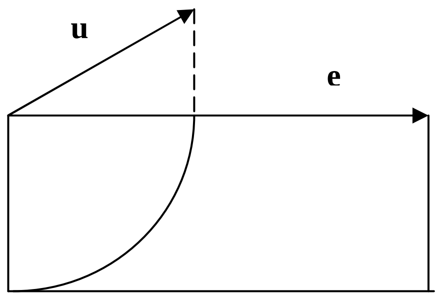
$$|M\alpha| = |MM^*| = \|(M - M^*)\| = \left\|\frac{\mathbf{n}\cdot(M-P)}{\mathbf{n}^2}\cdot\mathbf{n}\right\| = \frac{|\mathbf{n}\cdot(M-P)|}{\mathbf{n}^2}.\|\mathbf{n}\| = \frac{|\mathbf{n}\cdot(M-P)|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Znázorněme si vztah 22.2 geometricky, abychom si udělali jasnější představu. Přepišme vzorec 22.2 do tvaru

$$|M\alpha| = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}.(M-P), \tag{22.2´}$$

v němž jsme „zapomněli“ na pravé straně napsat absolutní hodnotu. Pravá strana je ale skalární součin dvou vektorů a ten, jak již dobře víme, může být i číslo záporné. Protože levá strana toho vztahu znamená vzdálenost bodu M od (nad)roviny α, tedy představuje velikost úsečky, což je vždy nezáporné číslo, musí pravá strana vztahu (22.2)´ představovat také číslo nezáporné. Proto je to číslo v absolutní hodnotě.

Vektor $\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$ je jednotkový normálový vektor (nad)roviny α. V kapitole 16. jsme si ukázali, že absolutní hodnota skalárního součinu se číselně rovná obsahu obdélníka, jehož jedna strana má velikost rovnou velikosti jednoho vektoru a druhá strana má velikost rovnou velikosti pravoúhlého průmětu druhého vektoru do směru prvního vektoru. Je-li jeden z vektorů jednotkový, má obdélník jednu stranu o velikosti jedné, takže jeho obsah se číselně rovná velikosti té druhé strany. Připojený obrázek 22.2 znázorňuje popsanou situaci.

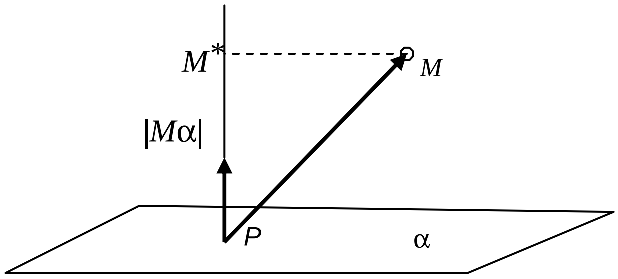


Obr. 22.2

Číslo $|\mathbf{u.e}|$ je nezáporné a vyjadřuje obsah obdélníku znázorněného na obrázku 22.2. Protože jedna jeho strana je rovna jedné, je jeho obsah roven velikosti druhé strany. Tato velikost je rovna velikosti pravoúhlého průmětu druhého vektoru do směru prvního vektoru.

Tato skutečnost nám pomůže dokonale pochopit smysl vzorce (22.2)´.

Chyba!



Obr. 22.3

Věta 22.4: Nechť je v $\mathbf{E}_n$ dán kartézský souřadnicový systém a v něm nadrovina α rovnicí $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0$ a bod $M = [m_1, m_2, ..., m_n]$. Pak je <u>vzdálenost bodu od nadroviny</u> vyjádřena vztahem:

$$|M\alpha| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + a\right|}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)}} \tag{22.3}$$

Důkaz 22.4: Je-li $P \in \alpha$, $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$, je $\sum_{i=1}^{n} a_i p_i + a = 0$. Pak platí podle věty 22.1

$$|M\alpha| = \frac{|\mathbf{n}\,.(M - P)|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i (m_i - p_i)\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2\right)}} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i m_i - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i\right|}{\sqrt{\left(a_i^2\right)}} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + a - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i + a\right|}{\sqrt{\left(a_i^2\right)}} =$$

$$= \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + a\right|}{\sqrt{\left(a_i^2\right)}}.$$

Vztah (22.3) se vyskytuje i ve středoškolských učebnicích pro $n = 3$. V následujícím textu si ukažme použití Grammova determinantu při stanovení vzdálenosti bodu od roviny.

Věta 22.5: Je-li v $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ dán podprostor $\mathbf{E}_k = \langle B, \mathbf{V}_k \rangle$, přičemž $\mathbf{V}_k = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k]$, a body $P \in$ B, $M \in$ A, je

$$|M\alpha| = \sqrt{\frac{\mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k, M - P)}{\mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)}}\,. \tag{22.4}$$

Důkaz 22.5:

$$\mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k, M - P) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_1.(M-P) \\ ... & ... & ... & ... \\ & & & \\ \mathbf{a}_k.\mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_k.\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_k.(M-P) \\ (M-P).\mathbf{a}_1 & ... & (M-P).\mathbf{a}_k & (M-P)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_1.((M-M^*)+(M^*-P)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_k.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_k.\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_k.((M-M^*)+(M^*-P)) \\ ((M-M^*)+(M^*-P)).\mathbf{a}_1 & \dots & ((M-M^*)+(M^*-P)).\mathrm{a}_k & (M-M^*)^2+(M^*-P)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_1.(M-M^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_k.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_k.\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_k.(M-M^*)) \\ (M-M^*).\mathbf{a}_1 & \dots & (M-M^*).\mathbf{a}_k & (M-M^*)^2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_1.\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_1.(M^*-P) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_k.\mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_k.\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_k.(M^*-P)) \\ (M^*-P).\mathbf{a}_1 & \dots & (M^*-P).\mathbf{a}_k & (M^*-P)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (M-M^*)^2 \cdot \mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) + \mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, M^*-P) = (M-M^*)^2 \cdot \mathrm{G}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$$

Věta 22.6: Jsou-li $\mathbf{E}_k$ = <B, $\mathbf{V}_k$>, $\mathbf{E}_r$ = <C, $\mathbf{V}_r$> dva rovnoběžné podprostory prostoru $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$>, přičemž $k < r$, $M, N \in$ B, je $|M\mathbf{E}_r| = |N\mathbf{E}_r|$.

Důkaz 22.6: Je-li $M = N + \mathbf{a}$, je $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_k$ a tedy i $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_r$, neboť $\mathbf{V}_k$ je podprostorem $\mathbf{V}_r$. Je-li N^* ortogonální průmět bodu N do $\mathbf{E}_r$, $P = N^* + \mathbf{a}$, je $M - P = (N + \mathbf{a}) - (N^* + \mathbf{a}) = N - N^* \perp \mathbf{E}_r$. Je tedy $P = M^*$, neboť $P \in$ C. Z toho plyne $M - M^* = N - N^* = \mathbf{a}$ a tedy i $|M\mathbf{E}_r| = \|M-M^*\| =$ $= \|N-N^*\| = |N\mathbf{E}_r|$.

Definice 22.2: <u>Vzdálenost μ dvou rovnoběžných podprostorů prostoru</u> $\mathbf{E}_n$ je vzdálenost libovolného bodu podprostoru menší dimenze od druhého podprostoru.

Věta 22.7: Jsou-li v $\mathbf{E}_n$ dány dvě rovnoběžné nadroviny α, β rovnicemi:

$$\alpha: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a = 0,$$

$$\beta: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0,$$

je

$$|\alpha\beta| = \frac{|b-a|}{\sqrt{\left(\left(\sum_{i\acute{e}1}^{n} a_i^2\right)\right)}}. \tag{22.5}$$

Důkaz 22.7: Zvolme $M = [m_1, m_2, \dots, m_n] \in \alpha$, takže $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + a = 0$. Je

$$|\alpha\beta| = |M\beta| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} = \frac{\left|(\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b) - (\sum_{\mathrm{i}=1} a_i m_i + a)\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} = \frac{|b-a|}{\sqrt{\left(\left(\sum_{\text{ié}1}^{n} a_i^2\right)\right)}}.$$

Vzorec (22.5) je v trojrozměrném prostoru docela dobře představitelný. Rovina je dána rovnicí typu $ax + by + cz + d = 0$, kde **n** = (a, b, c) je normálový vektor. Na výraz $ax + by + cz$ se můžeme dívat jako by to byl skalární součin dvou vektorů. Jeden je normálový vektor dané roviny, druhý je polohový vektor jejího libovolného bodu.

Pokud bychom vyjádřili normálový vektor v normovaném tvaru, tj. jako jednotkový normálový vektor, museli bychom, jak také dobře víme, každou jeho souřadnici dělit velikostí normálového vektoru. Dostáváme rovnici tvaru

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0\,,$$

kterou můžeme přepsat do tvaru

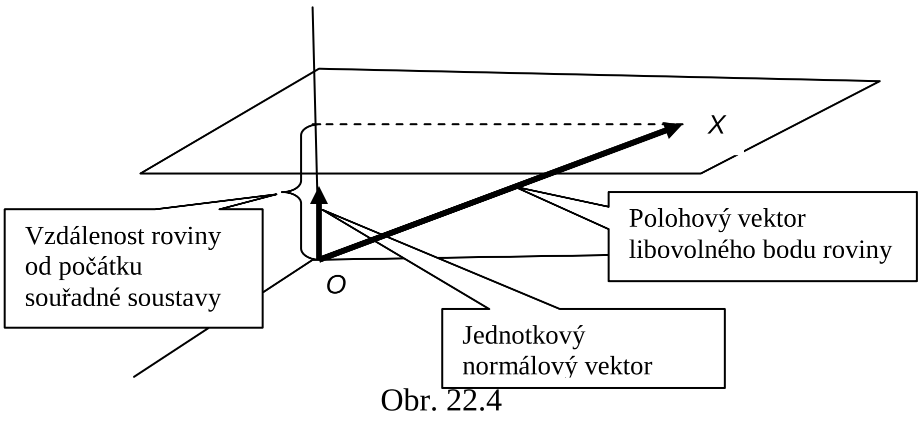
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.z + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$$

a dále $$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.z = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

a $$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.z\right| = \left|-\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$

O skalárním součinu jednotkového vektoru s libovolným vektorem jsme již řekli mnoho. Na obrázku 22.4 si opět ukažme geometrický význam tohoto skalárního součinu.

Chyba!



Obr. 22.4

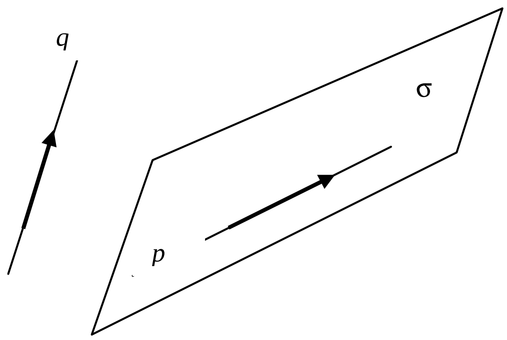
Vzorec (22.5) vlastně znamená rozdíl vzdáleností dvou rovin od počátku, tedy vzdálenost mezi nimi.

Věta 22.7: Jsou-li $\mathbf{E}_k$ = <B, $\mathbf{V}_k$>, $\mathbf{E}_r$ = <C, $\mathbf{V}_r$> dva mimoběžné podprostory prostoru $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$>, $M \in$ B, $\mathbf{E}_s = \langle M + (\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_r), \mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_r \rangle$, je $|\mathbf{E}_k\mathbf{E}_r| = |\mathbf{E}_r\mathbf{E}_s|$.

Důkaz 22.7: Mějme dány dva podprostory $\mathbf{E}_k$ = <B, $\mathbf{V}_k$>, $\mathbf{E}_r$ = <C, $\mathbf{V}_r$> prostoru $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$>. Jsou-li $P \in$ B, $Q \in$ C dva body takové, že $|PQ| = \min |XY|$, $X \in$ B, $Y \in$ C, je Q, podle věty 22.2, ortogonálním průmětem bodu P do podprostoru $\mathbf{E}_r$ a bod P je ortogonálním průmětem bodu Q do podprostoru $\mathbf{E}_k$. Je tedy $Q - P \perp \mathbf{V}_k$ a $Q - P \perp \mathbf{V}_r$, takže $Q - P \perp \mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_r$.

Je-li $M \in$ B, je prostor $\mathbf{E}_s = \langle M + (\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_r), \mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_r \rangle$ nadrovinou prostoru $\mathbf{E}_k \vee \mathbf{E}_r$ a jejím normálovým vektorem je vektor $Q - P$. Je $s = k + l$ - p, kde $p = \dim(\mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_r)$, $\dim(\mathbf{E}_k \vee \mathbf{E}_r) =$ $= s + 1$. Protože $\mathbf{E}_r \parallel \mathbf{E}_s$, $Q \in$ C, $P \in$ M + $(\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_r)$, je $|PQ| = |\mathbf{E}_r\mathbf{E}_s| = |\mathbf{E}_k\mathbf{E}_r|$ podle věty 22.6.

Pokusme se udělat si představu o smyslu předchozí věty. Nechť ty dva mimoběžné prostory jsou dvě mimoběžné přímky. Afinní prostor $\mathbf{E}_s$ je v tomto konkrétním případě rovina σ, v níž leží přímka $p = \mathbf{E}_k$ a jejíž zaměření jsou směrové vektory obou přímek, $q = \mathbf{E}_r$. Grafické znázornění by vypadalo např. takto (obr. 22.5):



Obr. 22.5

Definice 22.3: <u>Osa dvou mimoběžných podprostorů prostoru</u> $\mathbf{E}_n$ je příčka obou podprostorů, která je k nim kolmá.

Konstrukce osy dvou mimoběžných podprostorů:

Nechť jsou dány dva podprostory $\mathbf{E}_k$ = <B, $\mathbf{V}_k$>, $\mathbf{E}_r$= <C, $\mathbf{V}_r$> prostoru $\mathbf{E}_n$ = <A, $\mathbf{V}_n$>.

a) Sestrojíme vektor $\mathbf{n} = Q - P$ z podmínek $\mathbf{n} \perp \mathbf{V}_k$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{V}_r$, $\mathbf{n} \in \mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_r \vee (M - N)$, kde $M \in$ B, $N \in$ C.

b) Označme $\dim(\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_r) = s$, $\dim(\mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_r) = p$.

Sestrojíme prostor $\mathbf{E}_{r+1} = \langle N + (\mathbf{V}_r \vee [\mathbf{n}]), \mathbf{V}_r \vee [\mathbf{n}] \rangle$. Je $\mathbf{E}_k \vee \mathbf{E}_{r+1} = \mathbf{E}_k \vee \mathbf{E}_r$, takže $\dim(\mathbf{E}_k \vee \mathbf{E}_{r+1}) = \dim(\mathbf{E}_k \vee \mathbf{E}_r) = s + 1 = k + r - p + 1$.

Je tedy $\dim(\mathbf{E}_k \cap \mathbf{E}_{r+1}) = k + r + 1 - (k + r - p + 1) = p$.

Je-li tedy $\mathbf{E}_k \cap \mathbf{E}_{r+1} = \langle$D, $\mathbf{V}_p \rangle$, pak stačí zvolit $P \in$ D a sestrojit $Q = \mathbf{E}_r \cap k$, kde k: $X = P + t\mathbf{n}$. Je-li $\mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_r = \mathbf{o}$, je osa obou podprostorů určena jednoznačně, neboť $p = 0$.

Je-li p > 0, je osa obou podprostorů určena víceznačně.

Shrnutí 22

Obsahem této obsáhlé kapitoly byly vzdálenosti podprostorů. Definovala se vzdálenost dvou bodových množin. Pojem vzdálenosti je založen na pojmu ortogonálního průmětu bodu do podprostoru.

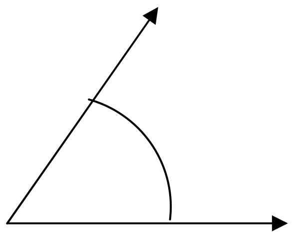
Věta 22.1 popisuje vzdálenost dvou bodů v euklidovském prostoru. Vychází se z definice metriky v euklidovských prostorech. Následující věta popisuje vzdálenost bodu od podprostoru, na ni navazuje vzdálenost bodu od nadroviny. Tato věta má v $\mathbf{A}_3$ mnohá užitečná použití.

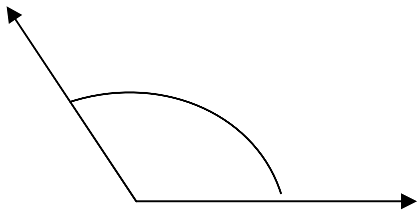
Dále byl zaveden pojem vzdálenosti dvou rovnoběžných podprostorů, samozřejmě se akcentuje případ dvou rovnoběžných nadrovin. Problematika se uzavřela ukázkou konstrukce nejkratší příčky dvou mimoběžek v $\mathbf{A}_3$, a tím výpočtem vzdálenosti dvou mimoběžek.

23. Odchylka dvou podprostorů prostoru $\mathbf{E}_n$

V předposlední kapitole tohoto dílu si řekneme něco o odchylkách. Začněme poznámkou, že geometrie nezná pojem úhel dvou vektorů. O tom jsme již mluvili v kapitole 16. Úhel je část roviny. Jaká část roviny je určena dvěma různými vektory? Přece žádná. Odchylka dvou vektorů je reálné číslo, které jsme značili symbolem $\angle$(první vektor, druhý vektor) a které leží v intervalu $<0, \pi>$.

Z uvedeného je zřejmé, že odchylka dvou vektorů se číselně rovná velikosti (v radiánech) úhlu, jehož ramena dostaneme umístěním těch dvou vektorů tak, že jejich počáteční body splynou. Odchylky úhlu použijeme k definici odchylky dvou přímek. Z obrázku 23.1 je vidět, že

a) 

b) 

Obr.23.1

v případě a) je odchylka v intervalu $<0, \pi/2)$, takže její kosinus je kladný, v případě b) je odchylka v intervalu $(\pi/2, \pi)$, takže její kosinus je záporný.

Definice 23.1: V $\mathbf{E}_n$ mějme dány dvě přímky p: $X = M + t\mathbf{u}$, q: $X = N + s\mathbf{v}$. <u>Odchylka přímek p, q</u> (symbol $\angle(p, q)$) je reálné číslo dané rovností:

$$\cos \angle(p, q) = \frac{|\mathbf{u}.\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| . \|\mathbf{v}\|}. \qquad (23.1)$$

Na rozdíl od vzorce (16.4) má zlomek na pravé straně vztahu (23.1) v čitateli absolutní hodnotu. Tato malá změna má za následek, že $\cos \angle(p, q)$ nemůže být číslo záporné, tedy odchylka je vždy v intervalu $<0, \pi/2>$. Je tedy určitý rozdíl mezi odchylkou dvou vektorů a odchylkou dvou přímek.

Věta 23.1: Odchylka dvou přímek p, q je nezávislá na volbě směrových vektorů obou přímek.

Důkaz 23.1: Nechť $\mathbf{u}_1 = k\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1 = l\mathbf{v}$, $k, l \in \mathbf{R}$. Pak je

$$\frac{|\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1|}{\|\mathbf{u}_1\|.\|\mathbf{v}_1\|}=\frac{|k\mathbf{u}.l\mathbf{v}|}{\|k\mathbf{u}\|.\|l\mathbf{v}\|}=\frac{|(kl).(\mathbf{u}.\mathbf{v})|}{|k|.\|\mathbf{u}\|.|l|.\|\mathbf{v}\|}=\frac{|kl|.|\mathbf{u}.\mathbf{v}|}{|k|.|l|.\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}=\frac{|\mathbf{u}.\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}.$$

Věta 23.2: Odchylka přímek p: $x_i = m_i + tu_i$, q: $x_i = n_i + sv_i$ (i = 1, 2, ..., n), je určena rovností

$$\cos\angle(p, q) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} u_i.v_i\right|}{\sqrt{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)\right)}}. \tag{23.2}$$

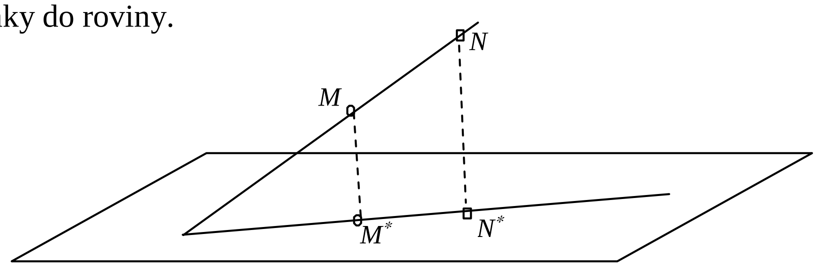
Důkaz 23.2: Plyne ze vzorce (23.1) po vyjádření skalárního součinu a velikostí vektorů.

Definice 23.2: <u>Odchylka $\angle(p, \mathbf{E}_k)$ přímky p od podprostoru $\mathbf{E}_k$ prostoru $\mathbf{E}_n$</u> je odchylka přímky p od jejího pravoúhlého průmětu p^* do podprostoru $\mathbf{E}_k$, není-li přímka p kolmá k $\mathbf{E}_k$. Je-li $p \perp \mathbf{E}_k$, je $\angle(p, \mathbf{E}_k) = \pi/2$.

Věta 23.3: Je-li přímka p rovnoběžná s podprostorem $\mathbf{E}_k$ prostoru $\mathbf{E}_n$, je $\angle(p, \mathbf{E}_k) = 0$.

Důkaz 23.3: Z věty 21.1(b) plyne: $p \parallel \mathbf{E}_k \Rightarrow p \parallel p^*$. Je-li tedy p: $X = M + t\mathbf{u}$, je p^*: $X = M^* + s\mathbf{u}$, takže $\cos\angle(p, p^*) = \dfrac{|\mathbf{u}.\mathbf{u}|}{\|\mathbf{u}\|^2} = \dfrac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = 1$.

Před následující větou bychom si měli udělat aspoň jednoduchý nákres v $\mathbf{A}_3$. Podprostorem $\mathbf{E}_k$ nechť je rovina. Dostaneme tak známý obrázek 23.2 vyjadřující pravoúhlý průmět přímky do roviny.



Obr.23.2

Věta 23.4: Jsou-li M, N dva body přímky p, M^*, N^* jejich ortogonální průměty do podprostoru $\mathbf{E}_k$ prostoru $\mathbf{E}_n$, je $|M^*N^*| = |MN| \cdot \cos\angle(p, \mathbf{E}_k)$.

Důkaz 23.4: Je-li $M = N$, je $M^* = N^*$, takže $|M^*N^*| = |MN| = 0$. Není-li $M = N$ a je-li $p \perp \mathbf{E}_k$, je $M^* = N^*$ a $\cos \angle(p, \mathbf{E}_k) = \cos(\pi/2) = 0$, takže $|M^*N^*| = 0$.

Jsou-li M, N dva různé body a není-li p kolmá k $\mathbf{E}_k$, označme $M^* - M = \mathbf{u}$, $N^* - N = \mathbf{v}$. Je tedy $\mathbf{u} \perp \mathbf{E}_k$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{E}_k \Rightarrow \mathbf{u} \perp N^* - M^* \Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \perp N^* - M^*$. Dále $N - M = (N - N^*) + (N^* - M^*) + (M^* - M) = (N^* - M^*) + \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Je tedy

$$\cos \angle(p, \mathbf{E}_k) = \frac{|(N^* - M^*)(N-M)|}{\|N-M\|.\|N^* - M^*\|} = \frac{|(N^* - M^*)^2 + (N^* - M^*)(\mathbf{u}-\mathbf{v})|}{\|N-M\|.\|N^* - M^*\|} = \frac{\|N^* - M^*\|^2}{\|N-M\|.\|N^* - M^*\|} =$$

$$= \frac{\|N^* - M^*\|}{\|N-M\|} = \frac{|M^*N^*|}{|MN|}.$$

Věta 23.5: Je-li p přímka, α nadrovina v $\mathbf{E}_n$, k přímka kolmá k nadrovině α, je

$$\sin \angle(p, \alpha) = \cos \angle(p, k). \tag{23.3}$$

Důkaz 23.5: Při označení z důkazu 23.4, kde $\mathbf{E}_k = \alpha$, je $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ směrový vektor kolmice k, takže

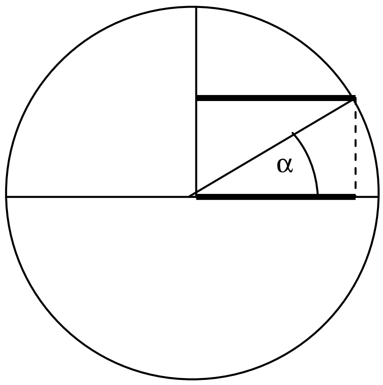
$$\cos \angle(p, k) = \frac{|(N-M).(\mathbf{u}-\mathbf{v})|}{\|N-M\|.\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|} = \frac{|((N-M)+\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})|}{\|N-M\|.\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|} = \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2}{\|N-M\|.\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|}{\|N-M\|}.$$

Potom $\sin^2 \angle(p, \alpha) = 1 - \cos^2(p, \alpha) = 1 - \dfrac{|M^*N^*|^2}{|MN|^2} = \dfrac{|MN|^2 - |M^*N^*|^2}{|MN|^2} =$

$$= \frac{\|N-M\|^2 - \|N^* - M^*\|^2}{\|N-M\|^2} = \frac{((N^* - M^*) + \mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - (N^* - M^*)^2}{\|N-M\|^2} = \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2}{\|N\text{-}M\|^2}.$$

Je tedy $\sin \angle(p, \alpha) = \dfrac{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|}{\|N-M\|}$.

K následující větě si řekněme pár slov. Je-li podprostorem nadrovina, můžeme s výhodou využít normálového vektoru nadroviny, popř. normovaného normálového vektoru nadroviny. Ze střední školy je známo, že $\cos \alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$. Chceme-li použít normálového vektoru, musíme použít i tohoto vzorce (viz obr. 23.3).



Obr. 23.3

Věta 23.6: Je-li α: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0$ nadrovina v $\mathbf{E}_n$, *p:* $x_i = m_i + tu_i$ (i = 1, 2,..., n) přímka, je

$$\sin \angle (p,\alpha) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right|}{\sqrt{((\sum_{i=1}^{n} a_i^2).(\sum_{i=1}^{n} u_i^2))}}. \tag{23.4}$$

Důkaz 23.6: Věta plyne z vět 20.3 a 23.5.

Definice 23.3: Odchylka dvou nadrovin α, β prostoru $\mathbf{E}_n$ ($\angle$(α,β)) je odchylka dvou přímek k, l, $k \perp \alpha$, $l \perp \beta$.

Věta 23.7: Jsou-li α : $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0$, β : $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0$ dvě nadroviny v $\mathbf{E}_n$, je

$$\cos \angle (\alpha,\beta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{((\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2))}}. \tag{23.5}$$

Důkaz 23.7: Věta plyne z věty 20.3.

Shrnutí 23

V této kapitole jsme poznali výpočet odchylky dvou přímek. Tato odchylka je vždy v intervalu (0, π/2). Odchylka dvou přímek není totéž, co odchylka jejich směrových vektorů.

Věty 23.3 a 23.4 popisovaly vlastnosti odchylky přímky od podprostoru. Je-li podprostorem nadrovina, využívá se jejího normálového vektoru, takže se problém převede na odchylku dvou přímek. Je zřejmé, že funkci kosinus musíme zaměnit funkcí sinus. Při stanovení odchylky dvou nadrovin využijeme opět odchylku jejich normálových vektorů.

24. Ortogonální transformace souřadnic ve $\mathbf{V}_n$ a v $\mathbf{E}_n$

Už jsme si řekli v kapitole 15., že afinní transformace a afinní transformace souřadnic nejsou stejné pojmy. Pojem afinní transformace souřadnic souvisí se změnou báze, takže v nové bázi má každý bod i vektor jiné souřadnice a my jsme zkoumali, jak tyto nové souřadnice najít, když jsme znali matici přechodu od jedné soustavy souřadné ke druhé soustavě souřadnic. V této kapitole nás budou zajímat takové transformace souřadnic, které zaměňují jednu ortogonální bázi jinou ortogonální bází.

Dokonce si budeme požadovat, aby obě ty báze byly ortonormální.

Definice 24.1: Ortogonální transformace souřadnic ve $\mathbf{V}_n$ je transformace souřadnic ve $\mathbf{V}_n$, která je přechodem od jedné ortonormální báze na jinou ortonormální bázi.

Mějme dány dvě ortonormální báze $\mathbf{B} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$, $\mathbf{B}' = \langle \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n' \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ s maticí přechodu $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $1 < i, j < n$. Je tedy pro $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\mathbf{e}_k \text{ a } \delta_{ij} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\mathbf{e}_k\right) \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} b_{jr}\mathbf{e}_r\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} b_{ik}b_{jr}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_r\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{jk},$$

takže

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{jk} = 0 \text{ pro } i \neq l \tag{24.1}$$

a

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{jk} = 1 \text{ pro } i = j. \tag{24.2}$$

Výrazy $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{jk}$ dostaneme při vynásobení prvků i-tého řádku matice přechodu $\mathbf{B}$ s prvky j-tého řádku této matice. Abychom mohli použít maticového označení, musel by být j-tý řádek j-tým sloupcem, což je možné pouze v případě, že druhá matice bude maticí transponovanou k té první, tedy $\mathbf{B}^T$. Součin matic $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T$ bude matice, v jejíž diagonále budou samé jedničky (podle vztahu 24.2), a prvky ležící mimo diagonálu budou nulové (podle vztahu 24.1). To je ale vlastnost matice jednotkové. Proto

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{E}. \tag{24.3}$$

Definice 24.2: Matice **B** je ortogonální právě tehdy, je-li $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{E}$.

Z výše uvedeného plyne

Věta 24.1: Nutná a postačující podmínka pro to, aby transformace souřadnic ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ byla ortogonální je, aby její matice přechodu byla ortogonální.

Řekli jsme si také, že souřadnicový systém, který je dán nějakým počátkem a ortonormálním bázovým systémem se nazývá kartézský souřadnicový systém. Proto můžeme s porozuměním přijmout následující definici.

Definice 24.3: Ortogonální transformace souřadnic v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ je transformace souřadnic v $\mathbf{E}_n$, která je přechodem od jednoho kartézského systému souřadnic k jinému kartézskému souřadnicovému systému.

Věta 24.2: Mějme dány v $\mathbf{E}_n$ dvě kartézské souřadnicové soustavy S = $<P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n>$, S' = $<P', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', ..., \mathbf{e}_n'>$, přičemž $P' = [m_1, m_2, ..., m_n]$. Je-li $\alpha_{ik} = \angle(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k)$, jsou rovnice transformace souřadnic při přechodu od S k S´

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i'.\cos\alpha_{ik} + m_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{24.4}$$

Důkaz 24.2: Je-li $\mathbf{e}' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, je $\mathbf{B} = (b_{ij})$ maticí přechodu od S k S´

a $\mathbf{e}_i'.\mathbf{e}_k = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_j\right).\mathbf{e}_k = b_{ik}$. Vzhledem k tomu je

$$\cos\alpha_{ik} = \frac{\mathbf{e}_i'.\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_i'\|.\|\mathbf{e}_k\|} = b_{ik}. \tag{24.5}$$

Protože ve vzorci (24.5) se vyskytuje pouze funkce kosinus, která je sudá, tj. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, nemusíme si dělat starosti, jestli stanovíme odchylku od $\mathbf{e}_i'$ k $\mathbf{e}_k$ nebo obráceně. Ukažme si možné ortogonální transformace v prostoru $\mathbf{E}_2$. Protože $\cos\alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$, můžeme ve výrazech použít i funkci sinus.

Mějme v $\mathbf{E}_2$ dánu transformaci souřadnic rovnicemi

$$x = ax' + by' + p$$
$$y = cx' + dy' + q.$$

Aby tato transformace byla ortogonální, musí být

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24.6}$$

takže

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1, \\ ab + cd &= 0, \\ b^2 + d^2 &= 1. \end{aligned} \tag{24.7}$$

Je-li $\angle(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1) = \alpha$, je $a = \cos\alpha$, $c = \pm\sin\alpha$. Rozlišujme tedy dvě možnosti:

a) $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$. Potom je

$$b.\cos\alpha + d.\sin\alpha = 0, \tag{24.8}$$

odkud dostaneme $b = t\cdot\sin\alpha$, $d = -\, t\cdot\cos\alpha$, kde $t \in \mathbf{R} - \{0\}$ je libovolný nenulový parametr. Dosazením do třetí rovnice v soustavě (24.7) dostaneme $t^2\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1$, takže $|\, t \,| = 1$. Opět musíme rozlišit dvě možnosti:

α) $t = 1$. V tom případě rovnice transformace jsou

$$\begin{aligned} x &= x'\cdot\cos\alpha + y'\cdot\sin\alpha + p \\ y &= x'\cdot\sin\alpha - y'\cdot\cos\alpha + q \end{aligned} \tag{24.9}$$

β) $t = -1$. Rovnice transformace budou mít tvar

$$\begin{aligned} x &= x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha + p \\ y &= x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha + q. \end{aligned} \tag{24.10}$$

b) $a = \cos\alpha$, $c = -\sin\alpha$. Nyní platí podle (24.7)

$$b\cdot\cos\alpha - d\cdot\sin\alpha = 0, \tag{24.11}$$

takže $b = t\cdot\sin\alpha$, $d = t\cdot\cos\alpha$. Z třetí rovnice soustavy (24.7) opět dostaneme $|\, t \,| = 1$ a musíme tedy rozlišit dvě možnosti:

α) $t = 1$. Rovnice transformace budou mít v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} x &= x'\cdot\cos\alpha + y'\cdot\sin\alpha + p \\ y &= -\, x'\cdot\sin\alpha + y\cdot.\cos\alpha + q. \end{aligned} \tag{24.12}$$

β) $t = -1$. Rovnice transformace mají tvar

$$\begin{aligned} x &= x'.\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha + p \\ y &= -\, x'\cdot\sin\alpha - y'\cdot\cos\alpha + q. \end{aligned} \tag{24.13}$$

Z těchto čtyř možností vedou dvě transformace ke shodné orientaci zaměření afinního prostoru ((24.10) a (24.12)), neboť determinanty matic přechodu jsou rovny jedné (a tedy kladné), zatímco ostatní dvě transformace vedou k opačné orientaci zaměření afinního prostoru.

Věnujme se nyní transformaci (24.10). Determinant matice přechodu je

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1 .$$

Pokud je $\alpha = 0$, dostaneme transformaci

$$x = x' + p$$

$$y = y' + q, \tag{24.14}$$

což jsou rovnice posunutí o vektor (p, q). Počátek P' nového souřadného systému má pak v původním souřadném systému souřadnice $[p, q]$.

Ostatní transformace si jistě vymodelujete v EXCELU a správně určíte, co znamenají.

Shrnutí 24

Ortogonální transformace jsou takové transformace, které jistou kartézskou souřadnicovou soustavu mění na jinou kartézskou souřadnicovou soustavu. Matice přechodu **A** má v tomto případě vlastnost $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$.

Známe-li vektory nové báze, lze transformační rovnice stanovit ze vztahu (24.4). V prostoru $\mathbf{E}_2$ jsme po podrobném rozboru všech možností dospěli kromě posunutí, které má jednotkovou matici přechodu, ke čtyřem možným ortogonálním transformacím:

1) <u>otočení v kladném směru</u> dává vztah (24.10),
2) <u>otočení v záporném směru</u> dává vztah (24.12),
3) <u>osovou souměrnost</u> s osou procházející 1. a 3. kvadrantem a s odchylkou $\alpha/2$ od kladné osy dává vztah (24.9),
4) <u>osovou souměrnost</u> s osou procházející 2. a 4. kvadrantem a s odchylkou $\alpha/2$ od záporné osy dává vztah (24.13).