

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Dofková, R., Kopecký, M.

GEOMETRIE 3

OLOMOUC 2008

Obsah

25. Shodná zobrazení (izometrie)	3
Shrnutí 25	6
26. Souměrnost podle nadroviny	7
Shrnutí 26	10
27. Translace	12
Shrnutí 27	14
28. Souměrnost podle středu	15
Shrnutí 28	17
29. Klasifikace shodných transformací přímky E_1 a roviny E_2	18
29.1 Shodné transformace na přímce	18
29.2 Shodné transformace v rovině	19
Shrnutí 29	26
30. Izometrie v E_3	27
Shrnutí 30	32
31. Homotetie (stejnolehlosti)	34
Shrnutí 31	38
32. Grupa homotetií	39
Shrnutí 32	44
33. Grupa podobných transformací prostoru E_n	45
Shrnutí 33	48
34. Podobné transformace v E_1 a E_2 . Podobnost geometrických útvarů	49
Shrnutí 34	53
35. Základní afinity	54
Shrnutí 35	60
36. Klasifikace afinních transformací v A_2	61
Shrnutí 36	65

25. Shodná zobrazení (izometrie)

Zobrazíme-li trojúhelník ABC ve středové souměrnosti se středem v bodě S , dostaneme trojúhelník $A'B'C'$, který je shodný s původním trojúhelníkem. V následujících kapitolách budeme zkoumat vlastnosti takových zobrazení, která zobrazují geometrické útvary na útvary shodné s těmi původními. I zde se nachází několik úskalí. Při koupi nového blatníku musíme vědět, zda potřebujeme pravý, či levý. Ty blatníky sice jsou shodné, ale nějak nepřímo. My tušíme, že budou asi rovinově souměrné. Aspoň toto úskalí jsme si naznačili, tak se pojdme pustit do práce.

Definice 25.1: Mějme dán euklidovský prostor $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$. Afinní zobrazení f nositelky A do sebe je shodné (izometrie) právě tehdy, je-li pro každé dva body $X, Y \in A$

$$|XY| = |f(X)f(Y)|. \quad (25.1)$$

V izometrii se tedy při zobrazení nemění vzdálenosti dvou bodů.

Věta 25.1: Izometrie je prosté zobrazení v \mathbf{E}_n .

Důkaz 25.1: Věta plyne z definice metriky (odst. 20 (M1), (M2)): jsou-li X, Y dva různé body, je $|XY| > 0$ a tedy i $|f(X)f(Y)| > 0$, takže $f(X)$ a $f(Y)$ jsou dva různé body.

Věta 25.2: Afinní zobrazení f prostoru \mathbf{E}_n je právě tehdy izometrií, jestliže s ním asociované lineární zobrazení φ má alespoň jednu z těchto vlastností:

- (a) zachovává velikost vektorů, tj., pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ platí $\|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$,
- (b) zachovává skalární součin vektorů, tj. pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v})$.

Důkaz 25.2: (a) Je-li $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n, M \in A, N = M + \mathbf{u}$, je $N - M = \mathbf{u}$ a $\|\mathbf{u}\| = \|N - M\| = |MN| = |f(M)f(N)| = \|f(N) - f(M)\| = \|\varphi(N - M)\| = \|\varphi(\mathbf{u})\|$.

(b) Podle věty 16.1(e) je pro dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1/2 ((\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2) = 1/2 (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) = 1/2 (\|\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v})\|^2 - \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi(\mathbf{v})\|^2) = 1/2 (\|\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi(\mathbf{v})\|^2) = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v})$.

Věta 25.3: Izometrie zachovává odchylky (je to izogonální zobrazení).

Důkaz 25.3: Pro dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ a pro zobrazení φ , asociované s izometrií f , stačí dokázat: $\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cos \angle(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}))$.

$$\text{Je } \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v})}{\|\varphi(\mathbf{u})\| \cdot \|\varphi(\mathbf{v})\|} = \cos \angle(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})).$$

Věta 25.4: Afinní zobrazení f prostoru \mathbf{E}_n je právě tehdy izometrií, zobrazuje-li každý kartézský souřadnicový systém v \mathbf{E}_n opět na kartézský souřadnicový systém.

Důkaz 25.4: Mějme dán kartézský souřadnicový systém $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$. Označme φ asociované lineární zobrazení s f a pro $i = 1, 2, \dots, n$ je $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i'$.

Je-li f izometrie, je podle (17,1) pro $j = 1, 2, \dots, n$ je $\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, takže $\langle f(P), \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \dots, \mathbf{e}_n' \rangle$ je kartézský souřadnicový systém.

Je-li naopak $\langle f(P), \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \dots, \mathbf{e}_n' \rangle$ kartézský souřadnicový systém, je $\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \delta_{ij}$. Mějme dány

$$\text{dva vektory } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i.$$

$$\text{Je } \varphi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \varphi(\mathbf{e}_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \varphi(\mathbf{e}_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Podle věty 25.2(b) je f izometrie.

Věta 25.5: Afinní zobrazení prostoru \mathbf{E}_n je právě tehdy izometrií, je-li její matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ vzhledem ke kartézskému souřadnicovému systému $\mathbf{S} = \langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ ortogonální, tj., je-li $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{E}$.

Důkaz 25.5: (a) Je-li f izometrie s asociovaným lineárním zobrazením φ , je pro $i = 1, 2, \dots, n$

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \varphi(\mathbf{e}_r) \cdot \varphi(\mathbf{e}_s) = \delta_{rs}. \quad \text{Celkově dostaneme } \left(\sum_{j=1}^n c_{rj} \mathbf{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n c_{sk} \mathbf{e}_k \right) = \delta_{rs},$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{rj} c_{sk} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^n c_{rj} c_{sj} = \delta_{rs}. \quad \text{Odtud dostaneme } \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{E}.$$

(b) Je-li $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{E}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$, je $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{C}$, $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{C}$. Je tedy $(\varphi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{y})) = \varphi(\mathbf{x}) \cdot (\varphi(\mathbf{y}))^T = \mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{C})^T = \mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{y}^T = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$. Podle věty 25.2(b) je f izometrie.

Věta 25.6: Izometrie prostoru \mathbf{E}_n je transformace, jejíž matice má tu vlastnost, že $\det(\mathbf{C}) = \pm 1$. Je to tedy regulární transformace.

Důkaz 25.6: Je-li \mathbf{C} matice izometrie f , je $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{E}$, takže $1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T) = \det(\mathbf{C}) \cdot \det(\mathbf{C}^T) = (\det(\mathbf{C}))^2$.

Věta 25.7: Množina S_n všech izometrií v \mathbf{E}_n je grupou vzhledem k operaci skládání zobrazení.

Důkaz 25.7: Jsou-li f, g dvě izometrie prostoru \mathbf{E}_n s maticemi \mathbf{C}, \mathbf{D} , je $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{E}$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T = \mathbf{E}$ a složené zobrazení $g \circ f$ má matici $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$, pro níž je $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})^T = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{C}^T) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{E}$, takže $g \circ f \in S_n$. Regulární transformace f^{-1} má matici \mathbf{C}^{-1} , pro níž platí: $\mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{C}^{-1})^T = \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{C}^T)^{-1} = (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$. Je tedy $f^{-1} \in S_n$. Také zřejmě je $\text{id}_A \in S_n$.

Věta 25.8: Izometrie v $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ je určena $n + 1$ nezávislými body P_0, P_1, \dots, P_n a jejich obrazy P_0', P_1', \dots, P_n' , pro něž platí $|P_i P_j| = |P_i' P_j'|$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Důkaz 25.8: Věta plyne z věty 13.4 a z definice izometrie.

Definice 25.2: Dva geometrické útvary \mathbf{U}, \mathbf{V} v \mathbf{E}_n jsou shodné ($\mathbf{U} = \mathbf{V}$) právě tehdy, existuje-li izometrie f taková, že $f(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$.

Věta 25.9: Shodnost geometrických útvarů je ekvivalence na množině U_n všech geometrických útvarů prostoru \mathbf{E}_n .

Důkaz 25.9: Platí-li pro dva geometrické útvary \mathbf{U}, \mathbf{V} vlastnost $\mathbf{U} = \mathbf{V}$, existuje izometrie f tak, že $f(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$. To znamená, že $f^{-1}(\mathbf{V}) = \mathbf{U}$ a protože f^{-1} je izometrie, je $\mathbf{V} = \mathbf{U}$. Je také $\text{id}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$, což značí, že $\mathbf{U} = \mathbf{U}$. Je-li \mathbf{W} geometrický útvar a platí-li $\mathbf{U} = \mathbf{V}$, $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, existují izometrie f, g takové, že $f(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$, $g(\mathbf{V}) = \mathbf{W}$. Je tedy $(g \circ f)(\mathbf{U}) = \mathbf{W}$. Z věty 25.7 pak plyne $\mathbf{U} = \mathbf{W}$.

Shrnutí 25

V praxi nejpoužívanější, a tedy nejdůležitější geometrické transformace jsou shodnosti. Pro svoji důležitost v lidské praxi jsou témata o shodných zobrazeních zařazena do učiva základní školy. Tato kapitola obsahuje základní vlastnosti všech shodných zobrazení. Protože shodná zobrazení zachovávají velikosti úseček, dostala název izometrická. Již z matice transformace se často jednoduše pozná, že souvisí s nějakou izomerií – její determinant je roven ± 1 . Podstatným poznatkem této kapitoly je skutečnost, že složením dvou izometrií se obdrží opět izometrie, což vlastně vyjadřuje věta 25.7. Pro učitelskou praxi stojí za promyšlení význam věty 25.8. Pro jednoznačné určení druhu rovinné transformace nestačí znát polohu vzoru a obrazu, dokonce ani dva body a jejich obrazy nedefinují jednoznačně druh rovinného zobrazení. K tomu v rovině musí být dány tři body a jejich obrazy, navíc nezávislé body, tedy trojúhelník.

26. Souměrnost podle nadroviny

Součástí každého automobilu jsou blatníky. Také nejvíce trpí a jsou nejčastěji vyměňovaným dílem každého automobilu. Je každému jasné, že oba blatníky musejí být stejné, ale při nákupu dvou blatníků by se jistě prodavač zeptal, zda má být jeden pravý a druhý levý. Pravý blatník by se na levou stranu automobilu přidělat nedal. Právě zde se v praxi uplatňuje zobrazení, které má název rovinová souměrnost. Oba blatníky jsou rovinově souměrné. V žákovském sešitu se často objevují zobrazení, která vznikají osovou souměrností. Pak řekneme, že jsou dané útvary osově souměrné. Z dřívějších kapitol víme, že obecně nadrovina je $(n - 1)$ - dimenzionální podprostor prostoru n -dimenzionálního. Proto je osa (v osové souměrnosti) nadrovinou v prostoru \mathbf{A}_2 , rovina je nadrovinou v prostoru \mathbf{A}_3 . V tomto článku se dovíme společné vlastnosti všech těchto souměrností, a proto byl zvolen název souměrnost podle nadroviny.

Ke snadnějšímu čtení textu si ještě zopakujme význam symbolu $[M]$, což je podprostor generovaný množinou M . Symbol $[XY]$ v tomto významu představuje podprostor generovaný vektorem $Y - X$, takže dostaneme podprostor, obsahující všechny jeho násobky. Používáme rovněž množinových symbolů i pro použité bodové množiny, např. $X \in A - \sigma$, což znamená, že bod X neleží v množině σ .

Definice 26.1 Souměrnost podle nadroviny σ v \mathbf{E}_n (označení f) je neidentická izometrie v \mathbf{E}_n , která má tyto vlastnosti:

- každý bod nadroviny σ je samodružný,
- je-li $f(X) = X'$, je $XX' \cap \sigma \neq \emptyset$ pro každý bod $X \in A - \sigma$,
- $[XX'] \perp \sigma$,
- $|X\sigma| = |X'\sigma|$.

Velmi bychom doporučovali aplikovat tuto definici na osovou souměrnost a promyslet význam jednotlivých vlastností. Dospěli jste také u bodu b) k formulaci „Obraz každého bodu ležícího v polorovině s hraniční přímkou o leží v polorovině opačné“. Podobně i ostatní formulace.

Věta 26.1: Rovnice souměrnosti podle nadroviny $\sigma : \sum_{i=1}^n c_i x_i + c = 0$ jsou:

$$x_j' = x_j - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right) \text{ pro } j = 1, 2, \dots, n. \quad (26.1)$$

Důkaz 26.1: Je-li X bod, f souměrnost podle nadroviny σ , $X' = f(X)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $X' = [x_1', x_2', \dots, x_n']$ v kartézském souřadnicovém systému a bod R středem úsečky XX' , je

$$R = \left[\frac{x_1 + x_1'}{2}, \frac{x_2 + x_2'}{2}, \dots, \frac{x_n + x_n'}{2} \right], R \in \sigma, \text{ takže } \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{x_i + x_i'}{2} \right) + c = 0.$$

Dále je $[X, X'] \perp \sigma$, takže je $x_i' = x_i + kc_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (26.2)

a dostaneme postupně

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{2x_i + kc_i}{2} + c = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i + c + \frac{1}{2} k \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right) = 0, \quad k = \frac{-2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right).$$

Po dosazení do (26.2) obdržíme transformační rovnice.

Věta 26.2: Charakteristickými vektory souměrnosti podle nadroviny σ jsou všechny vektory zaměření nadroviny σ s charakteristickým číslem $k = 1$ a normálový vektor nadroviny σ , který má charakteristické číslo $k = -1$.

Důkaz 26.2: Necht' $\sum_{i=1}^n c_i x_i + c = 0$ je rovnice nadroviny σ . Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektor

zaměření nadroviny σ , je $\sum_{i=1}^n c_i u_i = 0$. Je-li φ zobrazení asociované s nadrovinovou

souměrností, $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}' = (u_1', u_2', \dots, u_n')$, je pro $j = 1, 2, \dots, n$:

$$u_j' = u_j - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i u_i \right), \text{ takže } u_j' = u_j, \text{ a tedy } k = 1.$$

Normálový vektor nadroviny σ je $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Označme $\varphi(\mathbf{c}) = (c_1', c_2', \dots, c_n')$. Pak platí

$$c_j' = c_j - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right) = -c_j, \text{ takže } k = -1.$$

Věta 26.3: Souměrnost podle nadroviny σ je nepřímá involutorní transformace prostoru \mathbf{E}_n .

Důkaz 26.3: Je-li $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \rangle$ báze zaměření nadroviny σ , \mathbf{c} normálový vektor nadroviny σ , je $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{c} \rangle$ báze zaměření \mathbf{V}_n prostoru \mathbf{E}_n . Podle věty 26.3 je $\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $\varphi(\mathbf{c}) = -\mathbf{c}$, takže determinant matice přechodu od báze $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{c} \rangle$ k bázi $\langle \varphi(\mathbf{a}_1), \varphi(\mathbf{a}_2), \dots, \varphi(\mathbf{a}_{n-1}), \varphi(\mathbf{c}) \rangle$ je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Involutornost nadrovinové souměrnosti vyplývá ze symetrie konstrukce bodu X' , souměrného k bodu X podle nadroviny σ v definici 26.1.

Věta 26.4: Ke každým dvěma různým bodům X, Y prostoru \mathbf{E}_n existuje jediná nadrovina σ , podle níž jsou oba body navzájem souměrné.

Důkaz 26.4: Je-li bod R středem úsečky XY , je $R + [Y - X]^\perp$ zřejmě nadrovinou, podle níž jsou dané body souměrné. Tato nadrovina je určena jednoznačně.

Věta 26.5: Každá izometrie v \mathbf{E}_n se dá rozložit na nejvýše $n + 1$ souměrností podle nadrovin.

Důkaz 26.5: Nechť P_0, P_1, \dots, P_n je $n + 1$ nezávislých bodů, f izometrie v \mathbf{E}_n , pak $P_i' = f(P_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Je $|P_i P_j| = |P_i' P_j'|$ ($j = 0, 1, \dots, n$). Nadrovinové souměrnosti, na něž se rozloží izometrie f , sestrojíme v několika krocích:

1. Je-li $P_0 = P_0'$, vynecháme první krok a přejdeme ke druhému kroku. Jsou-li P_0, P_0' dva různé body, provedeme první krok: Podle věty 26.4 existuje jediná nadrovina σ_1 souměrnosti bodů P_0, P_0' . Nechť jsou k bodům P_1, \dots, P_n podle nadroviny σ_1 souměrné postupně body $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}$. Mohou nastat tyto dvě možnosti:

a) $P_{11} = P_1'$. V tomto případě vynecháme druhý krok a přejdeme ke kroku třetímu.

b) Body P_{11} a P_1' jsou od sebe různé. V tomto případě opět existuje jediná rovina souměrnosti σ_2 obou bodů. Protože $|P_0'P_1'| = |P_0P_1| = |P_0'P_{11}|$, je $P_0' \in \sigma_2$, takže $\sigma_2(P_0') = P_0'$, $\sigma_2(P_{11}) = P_1'$ a body P_{12}, \dots, P_{1n} se postupně zobrazí do bodů P_{22}, \dots, P_{2n} .

2. Předpokládejme, že jsme již provedli k kroků, tj. našli jsme postupně nadroviny $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ ($k < n$), v nichž leží body $P_0', P_1', \dots, P_{k-1}$, takových, že složením souměrností podle těchto nadrovin jsme zobrazili body P_0, P_1, \dots, P_{k-1} postupně do bodů $P_0', P_1', \dots, P_{k-1}'$, body P_k, P_{k+1}, \dots, P_n postupně do bodů $P_{kk}, P_{k(k+1)}, \dots, P_{kn}$. Pro body P_{kk}, P_k' mohou nastat dvě možnosti:

a) $P_{kk} = P_k'$. Pak v případě $k = n$ proces ukončíme a můžeme říci, že $f = \delta_k \bullet \delta_{k-1} \bullet \dots \bullet \delta_1$. V případě $k < n$ přejdeme ke $(k+2)$ kroku.

b) Jsou-li body P_{kk} a P_k' různé, existuje jediná nadrovina σ_{k+1} , která je nadrovinou souměrnosti bodů P_{kk} a P_k' a platí $|P_{k-1}'P_k'| = |P_{k-1}P_k| = |P_{1(k-1)}P_{1k}| = |P_{2(k-1)}P_{2k}| = |P_{(k-1)(k-1)}P_{(k-1)k}| = |P_{k-1}'P_{kk}|$, takže $P_{k-1}' \in \sigma_{k+1}$. Existuje tedy přirozené číslo $r < n+1$ tak, že existují nadrovinové souměrnosti $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, pro něž je $f = \sigma_r \bullet \sigma_{r-1} \bullet \dots \bullet \sigma_1$.

Věta 26.6: Izometrie v \mathbf{E}_n je právě tehdy přímé zobrazení, dá-li se rozložit na sudý počet nadrovinových souměrností a nepřímé, dá-li se rozložit na lichý počet nadrovinových souměrností.

Důkaz 26.6: Věta plyne z věty 26.3.

Definice 26.2: Souměrnost podle nadroviny v \mathbf{E}_2 se nazývá osová souměrnost, souměrnost podle nadroviny v \mathbf{E}_3 se nazývá souměrnost podle roviny.

Shrnutí 26

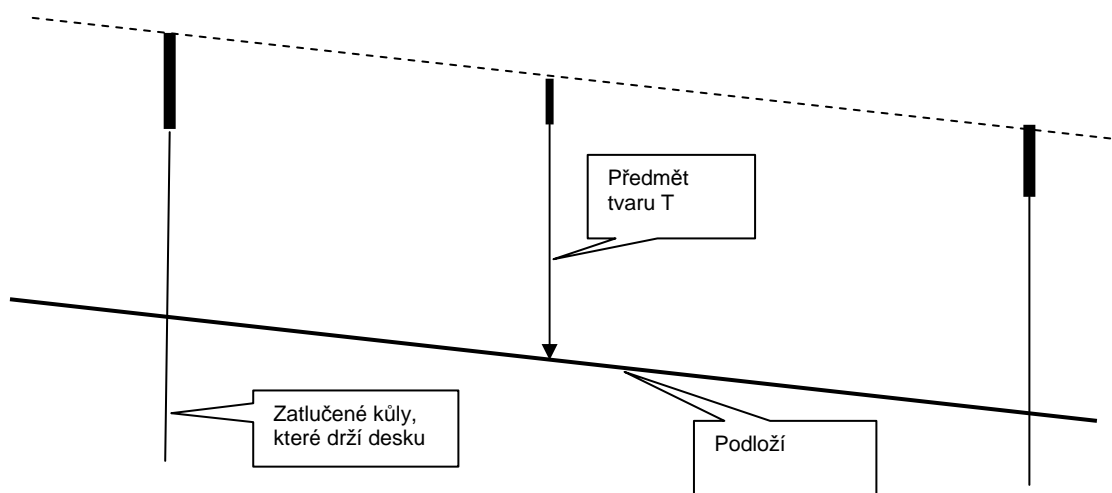
V tomto článku byly v definici a v šesti větách shrnuty všechny důležité vlastnosti nadrovinové souměrnosti. Ta je již definována řadou vlastností, které zobrazení musí mít, aby bylo nadrovinovou souměrností. Věta 26.1 nám umožní pro $n = 2$ pohodlně v EXCELU zobrazovat geometrické útvary podle osových souměrností. Je to cvičení, které vřele

doporučujeme. U řady prostorových útvarů se setkáváme se souměrností podle roviny.

K pochopení věty 26.5 budete asi potřebovat čtverečkový papír a všechny členy rodiny. Bude to zkouška její soudržnosti a odolnosti vůči nepříznivým vlivům. Nakreslete trojúhelník $P_0P_1P_2$ a s ním shodný trojúhelník $P_0'P_1'P_2'$ (třeba nějak otočený) a začněte sestrojovat jednotlivé osové souměrnosti, které převedou trojúhelník $P_0P_1P_2$ v trojúhelník $P_0'P_1'P_2'$. Vydrží-li celá rodina pospolu až do konce, může Vám rodinu každý závidět. Význam jednotlivých vět je zřejmý a je zbytečné, abychom je v tomto shrnutí znovu citovali.

27. Translace

Posunutí neboli translace je zobrazení, které se v praxi často používá. Velice náročné na přesnost je třeba položení odpadního potrubí. To musí mít vždy určitý sklon a zřídka kdy terén dovoluje, aby byl velký. Často rozhodují milimetry, a tak připravit v zemi podloží, na něž se pak potrubí položí, je práce dost náročná. S položeným potrubím se dodatečně jen velmi těžko manipuluje, takže vše je potřebí připravit tak, aby sklon potrubí byl pokud možno konstantní v celé délce kanalizace. Docílí se toho tím, že nad terénem umístíme v dostatečné vzdálenosti dvě vodorovné desky (označme je A a B) tak, aby sklon od desky A k desce B byl žádaný sklon budoucího potrubí. Jeden člověk se dívá přes desku A k desce B a druhý člověk zasunuje do výkopu předmět tvaru písmene T, kde „svislá nožička“ toho zařízení je vektor posunutí a „vodorovná část“ toho zařízení musí být v zákrytu s oběma deskami. Boční pohled na toto zařízení představuje obr. 27.1.



Obr.27.1

Podloží je tímto způsobem možno připravit velmi dokonale. Pojďme se nyní na toto zobrazení podívat podrobněji.

Definice 27.1: Translace τ je zobrazení prostoru $E_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, definované rovností

$$X' = X + \mathbf{a}, \quad (27.1)$$

kde $X, X' \in A$, $X' = \tau(X)$, $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$, \mathbf{a} je vektor translace a určuje směr translace, $\|\mathbf{a}\|$ je velikost translace. Je-li $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, je $\tau = \text{id}_A$ translace nevlastní. Je-li \mathbf{a} nenulový vektor, translace je vlastní.

Věta 27.1: Vlastní translace v \mathbf{E}_n má tyto vlastnosti:

- Je přímou izometrií,
- nemá samodružných bodů,
- všechny její směry jsou samodružné s charakteristickým číslem $k = 1$.

Důkaz 27.1: Rovnice (27.1) ukazuje, že translace je afinní zobrazení v \mathbf{E}_n s jednotkovou maticí \mathbf{E} . Protože $\det(\mathbf{E}) = 1$, je správné tvrzení a).

Z (27.1) dostaneme rovnici pro samodružné body $X = X + \mathbf{a}$, která pro nenulový vektor \mathbf{a} nemá řešení, takže tvrzení b) je správné.

Z rovnice (27.1) rovněž plyne, že rovnice lineárního zobrazení, asociovaného s translací τ , má rovnici $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$. Je to tedy identické zobrazení prostoru \mathbf{V}_n . Odtud plyne tvrzení c).

Věta 27.2: Složením dvou souměrností podle nadrovin σ_1, σ_2 spolu rovnoběžných dostaneme translaci, jejíž směr je kolmý k oběma nadrovinám a velikost je rovna dvojnásobku vzdálenosti nadrovin σ_1, σ_2 .

Důkaz 27.2: Označme s_i souměrnost podle nadroviny σ_i ($i = 1, 2$).

Rovina σ_1 nechť má rovnici $\sum_{i=1}^n c_i x_i + c = 0$, rovnice roviny σ_2 budiž $\sum_{i=1}^n c_i x_i + d = 0$. Z rovnic

(26.1) dostaneme pro $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 s_1: x_j' &= x_j - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right), \\
 s_2: x_j'' &= x_j' - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i' + d \right) = x_j - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right) - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=1}^n c_k x_k + c \right) + d \right) = \\
 &= x_j - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i \right) - \frac{2cc_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} - \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i \right) + \frac{4c_j}{\left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k x_k \right) + \\
 &+ \frac{4cc_j}{\left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^2} \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right) - \frac{2dc_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = x_j + \frac{2c_j}{\sum_{i=1}^n c_i^2} (c - d).
 \end{aligned}$$

Je tedy $s_2 \bullet s_1 : x' = x + \frac{2(c-d)}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \cdot \mathbf{n}$, kde $\mathbf{n} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ je normálový vektor rovin σ_1 a σ_2 .

Složené zobrazení $s_2 \bullet s_1$ je tedy translace s vektorem $\frac{2(c-d)}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \cdot \mathbf{n}$, jehož velikost je dána

$$\text{vztahem } \left\| \frac{2(c-d)}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \cdot \mathbf{n} \right\| = \frac{2|c-d|}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \cdot \|\mathbf{n}\| = \frac{2|c-d|}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} = 2 \cdot \frac{|c-d|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}}.$$

Věta 27.3: Množina T_n všech translací prostoru E_n tvoří Abelovu grupu vzhledem ke skládání zobrazení, izomorfní s grupou $\langle \mathbf{V}_n, + \rangle$.

Důkaz 27.3: Jsou-li $\tau_a : X' = X + \mathbf{a}$, $\tau_b : X' = X + \mathbf{b}$ dvě translace, je $\tau_b \bullet \tau_a : X' = (X + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = X + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Je tedy $\tau_b \bullet \tau_a = \tau_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$, takže zobrazení $\mathbf{a} \rightarrow \tau_a$ je homomorfismem grupy $\langle \mathbf{V}_n, + \rangle$ s grupou $\langle T_n, \bullet \rangle$. Toto zobrazení je však zřejmě vzájemně jednoznačné, takže je izomorfismem. Protože je $\langle \mathbf{V}_n, + \rangle$ Abelova grupa, je i $\langle T_n, \bullet \rangle$ Abelovou grupou.

V $\langle T_n, \bullet \rangle$ je neutrálním prvkem translace $\text{id} : X' = X + \mathbf{o}$, translace inverzní k translaci $\tau : X' = X + \mathbf{a}$ je translace $\tau^{-1} : X' = X - \mathbf{a}$.

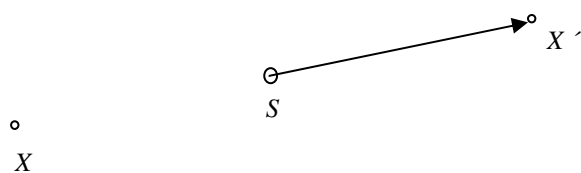
Shrnutí 27

V úvodu jsme ukázali použití translace při pokládání odpadního potrubí. Definice translace je dána vzorcem (27.1), věta 27.1 postuluje tři základní vlastnosti translace: je přímou izomerií, nemá samodružné body a všechny směry jsou samodružné. Translaci můžeme docílit i složením dvou nadrovinových souměrností, kde obě nadroviny jsou spolu rovnoběžné. Ve třetí větě tohoto článku jsme ukázali důležitou souvislost mezi strukturami $\langle \mathbf{V}_n, + \rangle$ a $\langle T_n, \bullet \rangle$. Obě struktury jsou izomorfní, z čehož plyne např. možnost znázornit skládání dvou translací součtem vektorů.

28. Souměrnost podle středu

Ve výčtu izometrických transformací, které mohou být realizovány v prostoru \mathbf{E}_n jsme dospěli ke středové souměrnosti. Způsob zobrazování je velmi jednoduchý, takže tento článek nevyžaduje žádnou zvláštní přípravu. Vyskytuje se pojem involutorní zobrazení, což v podstatě znamená, že zpáteční cesta od obrazu k vzoru probíhá podle zcela stejných pravidel, jako cesta od vzoru k obrazu. Odborněji řečeno, transformační rovnice inverzního zobrazení jsou naprosto stejné jako transformační rovnice zobrazení. Tuto vlastnost, jak poznáte v odborném textu, má právě středová souměrnost.

Transformační rovnice se odvozují z velice jednoduchého názoru v prostředí \mathbf{E}_2 .



Definice 28.1 Souměrnost s podle středu $S \in A$ je transformace prostoru $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, definovaná rovností

$$X' = S + (S - X), \quad (28.1)$$

kde $X, X' \in A$, $X' = s(X)$. Bod S se nazývá střed souměrnosti.

Věta 28.1: Středová souměrnost s v $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ se středem S má tyto vlastnosti:

- S je jediným samodružným bodem souměrnosti s ,
- s je involutorní zobrazení,
- je-li $X' = s(X)$, je bod S středem úsečky XX' ,
- je-li v daném kartézském souřadnicovém systému $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$,
 $X' = [x_1', x_2', \dots, x_n']$, jsou rovnice středové souměrnosti s

$$s: x_i' = -x_i + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (28.2)$$

- příčemž $S = \left[\frac{1}{2} a_1, \frac{1}{2} a_2, \dots, \frac{1}{2} a_n \right]$
- pro n liché je středová souměrnost v \mathbf{E}_n nepřímou izometrií, pro n sudé je izomerií přímou,
- ve středové souměrnosti jsou všechny směry samodružné s charakteristickým číslem $k = -1$,
- dvě přímky souměrné podle středu jsou nesouhlasně rovnoběžné.

Důkaz 28.1: a) Pro samodružné body je $X = S + (S - X) \Rightarrow X - S = S - X \Rightarrow X = S$.

b) Je-li s definována rovnicí (28.1), je s^{-1} definováno rovnicí $X = S + (S - X) \Rightarrow X' = S + (S - X)$. Je tedy $s = s^{-1}$, takže s je involutorní zobrazení.

c) Z (28.1) dostaneme $X' - S = -(X - S) \Rightarrow S - X' = -(S - X)$, z čehož je zřejmé, že $(X'XS) = -1$. S je tedy středem úsečky XX' .

d) Pro $S = [s_1, s_2, \dots, s_n]$ je podle za c) $s_i = \frac{x_i + x_i'}{2}$, takže $x_i' = -x_i + 2s_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Je-li tedy $2s_i = a_i$, je $s_i = \frac{1}{2} a_i$.

e) Z (28.1) dostaneme matici středové souměrnosti

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{E}$$

Protože $(-\mathbf{E}) \cdot (-\mathbf{E})^T = (-\mathbf{E}) \cdot (-\mathbf{E}) = \mathbf{E}$, je s izometrie, a protože $\det(-\mathbf{E}) = (-1)^n$, je tvrzení e) správné.

f) Rovnice pro asociované lineární zobrazení φ se středovou souměrností s vyplývají z (28.2):

$\varphi: \mathbf{u}' = -\mathbf{u}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{V}_n$, $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}' = (u_1', u_2', \dots, u_n')$. Je tedy $\mathbf{u}' = -\mathbf{u}$.

g) plyne z (f): je-li $p: X = M + t\mathbf{u}$ přímka, je $s(X) = s(M) - t\mathbf{u}$.

Věta 28.2:

a) Složíme-li dvě středové souměrnosti s_1, s_2 o středech S_1, S_2 , dostaneme posunutí o vektor $2 \cdot (S_2 - S_1)$.

b) Složíme-li středovou souměrnost s podle středu S s translací, určenou vektorem \mathbf{a} , dostaneme středovou souměrnost se středem $S_1 = S + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a}$.

Důkaz 28.2: a) Z rovnic pro souměrnosti s_1, s_2 plyne $s_1: X' = S_1 + (S_1 - X)$, $s_2: X' = S_2 + (S_2 - X)$ dostaneme rovnice pro složené zobrazení $s_2 \circ s_1$:

$$X'' = S_2 + (S_2 - X') = S_2 + (S_2 - S_1) - (S_1 - X) = S_2 + (S_2 - S_1) + (X - S_1) = X + 2(S_2 - S_1).$$

b) Budiž $s: X' = S + (S - X)$ rovnice středové souměrnosti, $\tau: X' = X + \mathbf{a}$ rovnice translace.

Rovnice složeného zobrazení jsou $\tau \circ s: X'' = X' + \mathbf{a} = S + (S - X) + \mathbf{a} = S + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a} + ((S + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a}) - X) = S_1 + (S_1 - X)$.

Shrnutí 28

Souměrnost podle středu neboli středová souměrnost je zobrazení, kterým se většinou na školách v hodinách geometrie začíná. Na druhou stranu existuje odborná literatura, která středovou souměrnost definuje jako otáčení o orientovaný úhel velikosti π (nebo $-\pi$). Problém je v tom, že rotace nemůže být definována v prostoru \mathbf{E}_n , zatímco středová souměrnost ano. Proto o rotaci (otáčení) budeme mluvit až v kapitole o aplikacích izometrických transformací v prostoru \mathbf{E}_2 . Z obou uvedených vět jsou zřejmé základní vlastnosti středové souměrnosti. Za úvahu stojí skutečnost, že i když jsou všechny směry samodružné s charakteristickým číslem -1 , je např. středová souměrnost v \mathbf{E}_2 přímou izomerií, což můžeme dokumentovat i tím, že středová souměrnost v rovině nemění smysl obíhání trojúhelníka.

29. Klasifikace shodných transformací přímky E_1 a roviny E_2

Shodné transformace se ve školské praxi realizují hlavně v prostředí E_2 , tedy v rovině, v žákovském sešitu. Kromě všech uvedených izometrických transformací zde ještě přibude rotace kolem nějakého bodu. Ve shrnutí 28 jsme si řekli, že rotace není realizovatelná v obecném prostředí E_n , a to proto, že k provedení této transformace je třeba mít nejen bod jako střed rotace, ale také orientovaný úhel, který je definován počátečním a koncovým ramenem, a tato ramena jsou dvě polopřímky se společným počátkem, tedy určují jednoznačně zaměření roviny. Rotace je tedy „rovinová záležitost“. V tomto článku se budeme zabývat všemi možnostmi, které vzniknou aplikací vektorové rovnice

$$X' = X.C + M$$

v prostředích E_1 a E_2 . V této vektorové rovnici bychom vlastně mohli psát všechny symboly tučně, protože symboly X' , X i M mohou být chápány jako polohové vektory jistých bodů (polohový vektor obrazu bodu X , polohový vektor bodu X , polohový vektor obrazu počátku souřadné soustavy v daném zobrazení), popř. bude vektorem jen to M ve stejném významu jako výše. Ještě připomínáme, že matice C má v prostředí E_1 pouze jeden řádek a jeden sloupec, takže je to jediné písmeno, které při zapsání do „maticové“ závorky má tvar např. (a). Teď už se pojd'me na ty transformace podívat.

29.1 Shodné transformace na přímce

Na přímce E_1 ($= \langle p, [\mathbf{u}] \rangle$) mějme dán (kartézský) souřadnicový systém $\langle P, \mathbf{e} \rangle$. Je-li f izometrie přímky E_1 , $X \in p$, $f(X) = X'$, $X = [x]$, $X' = [x']$, je

$$f: ax + b,$$

kde $(a) \cdot (a)^T = (1)$, takže $a^2 = 1$. Jsou tedy možné dva případy:

a) $a = 1$. Rovnice transformace je tedy

$$f: x' = x + b. \quad (29.1)$$

Zde jsou myslitelné opět dva případy:

α) $b = 0$. f má rovnici $x' = x$. Je to tedy identické zobrazení.

β) Pokud je b nenulové číslo, je f translace o vektor $\mathbf{b} = (b)$ o velikosti $|b|$

b) $a = -1$. Rovnice transformace je pak $x' = -x + b$. Podle věty

27.1(d) se jedná o středovou souměrnost se středem $S = [\frac{b}{2}]$.

29.2 Shodné transformace v rovině

V rovině \mathbf{E}_2 ($= \langle \sigma, \mathbf{V}_2 \rangle$) mějme dán kartézský souřadnicový systém $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$. Je-li f izometrie roviny, $X \in \sigma$, $f(X) = X'$, $X = [x, y]$, $X' = [x', y']$ a má-li f rovnice

$$\begin{aligned} f: x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q, \end{aligned} \tag{29.2}$$

musí být

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29.3}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1, \\ ab + cd &= 0, \\ b^2 + d^2 &= 1. \end{aligned} \tag{29.4}$$

Vzhledem k první rovnici ve (29.4) můžeme položit

$$a = \cos \alpha.$$

Pro c jsou pak tyto možnosti:

a) $c = \sin \alpha$.

Dosadíme-li do druhé rovnice (29.4), dostaneme

$$b \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin \alpha = 0.$$

Můžeme zde položit

$$b = t \cdot \sin \alpha, d = -t \cdot \cos \alpha.$$

Z poslední rovnice (29.4) pak dostaneme

$$t^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1, \tag{29.5}$$

odkud dostaneme

$$t^2 = 1. \tag{29.6}$$

Nyní musíme uvažovat dvě možnosti:

a₁) $t = 1$.

V tomto případě rovnice transformace nabudou tvaru

$$\begin{aligned} f: x' &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha + p \\ y' &= x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha + q. \end{aligned} \tag{29.7}$$

Matice této transformace je

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

a její determinant je roven -1. Je to tedy nepřímá izometrie.

Budeme nyní hledat samodružné směry. Úloha se redukuje na nalezení charakteristických vektorů s konkrétními charakteristickými čísly. Konkrétnější představu můžeme získat pomocí obr. 29.1. Zobrazení φ asociované k zobrazení f , které je dáno vztahem (29.7), bude dáno stejným předpisem s tím rozdílem, že posunutí, dané vektorem (p, q) , nemá na zobrazování vektorů vliv. Označíme-li $\mathbf{w}' = (w_1', w_2')$ obraz vektoru $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ v zobrazení φ , platí analogicky ve shodě s (29.7)

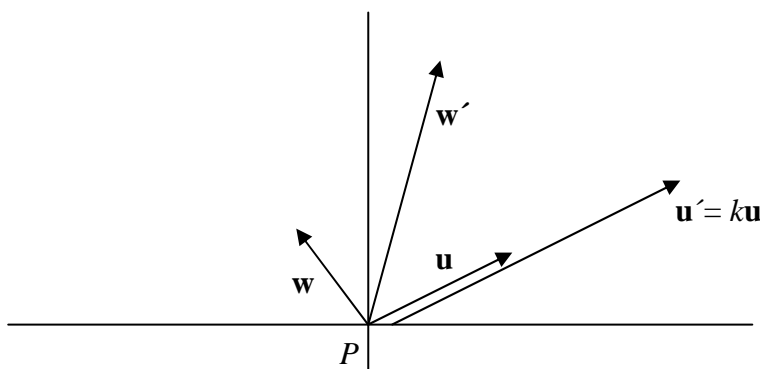
$$\varphi: w_1' = w_1 \cos\alpha + w_2 \sin\alpha$$

$$w_2' = w_1 \sin\alpha - w_2 \cos\alpha$$

Rovnice pro samodružný směr s charakteristickým vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a charakteristickým číslem k jsou

$$ku_1 = u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha$$

$$ku_2 = u_1 \sin\alpha - u_2 \cos\alpha. \quad (29.8)$$



Obr. 29.1

Úpravou dostaneme

$$(\cos\alpha - k) \cdot u_1 + u_2 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$u_1 \cdot \sin\alpha - (\cos\alpha + k) \cdot u_2 = 0. \quad (29.9)$$

Podmínka netriviálnosti řešení této soustavy rovnic je

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - k & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -k - \cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Charakteristická rovnice transformace je tedy

$$k^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \Rightarrow k^2 = 1$$

Pro $k = 1$ dostaneme z (29.9)

$$(\cos\alpha - 1) \cdot u_1 + u_2 \cdot \sin\alpha = 0,$$

takže $\mathbf{u} = (\sin\alpha, 1 - \cos\alpha)$ je vektor, určující samodružný směr s charakteristickým číslem $k = 1$.

Pro $k = -1$ dostaneme podobně

$$v_1 \cdot \sin\alpha + (1 - \cos\alpha) \cdot v_2 = 0, \quad (29.10)$$

odkud dostaneme vektor $\mathbf{v} = (\cos\alpha - 1, \sin\alpha)$, určující samodružný směr s charakteristickým číslem $k = -1$. Protože $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, jsou oba samodružné směry transformace (29.9) k sobě kolmé. Dva samodružné směry s charakteristickými čísly $k = 1$ a $k = -1$ jsou typické pro osovou souměrnost. Neuvažujme zatím vektor (p, q) . Směrový vektor osy o musí být vektor \mathbf{u} s charakteristickým číslem $k = 1$. Protože znázornění vektoru $\mathbf{u} = (\sin\alpha, 1 - \cos\alpha)$ není nijak jednoduché, snažme se místo vektoru \mathbf{u} vzít vektor jednotkový a kolineární s \mathbf{u} . Označme ho např. \mathbf{j} . Protože výraz $1 - \cos\alpha$ se vyskytuje ve vzorcích pro poloviční úhel, vyjádřeme obě souřadnice podle vzorců pro poloviční úhel. Dostaneme

$$\mathbf{u} = \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \quad (29.11)$$

Abychom ho mohli normovat, vypočteme jeho velikost, tj.

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2})} = \left| 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right|.$$

Pro $0 \leq \alpha \leq \pi$ je $0 \leq \sin \frac{\alpha}{2}$, toto rozmezí nám ke znázornění osy o stačí, takže můžeme absolutní hodnotu vynechat. Po normování dostaneme

$$\mathbf{j} = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad (29.12)$$

což je vektor, který dovedeme v našem souřadnicovém systému $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ zakreslit. Osa o má, pokud (p, q) je nulový vektor, rovnici

$$y = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot x,$$

takže je také možno ji velmi jednoduše znázornit. Proberme nyní některé zvláštní případy.

1) $\alpha = 0$

Z (29.7) pak dostaneme $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, takže rovnice transformace f se zjednoduší:

$$\begin{aligned} f: x' &= x + p \\ y' &= -y + q. \end{aligned} \quad (29.13)$$

Pro samodružné body transformace (29.13) dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} x &= x + p \\ y &= -y + q, \end{aligned}$$

po úpravě

$$0 = p$$

$$2y = q.$$

Nyní můžeme rozlišovat tyto možnosti:

$$1.1) p = 0, q = 0$$

V tom případě existuje přímka samodružných bodů o s rovnicí $y = 0$

Transformace f bude pak mít rovnice

$$f: x' = x$$

$$y' = -y. \quad (29.14)$$

To je osová souměrnost v rovině s osou souměrnosti o_x

$$1.2) p = 0, q \text{ je nenulové}$$

V tomto případě dostaneme přímku samodružných bodů o rovnicí $2y = q$. Jistě dovedeme transformační rovnice (29.14) pro tento případ přizpůsobit.

$$1.3) p \text{ je nenulové}$$

V tom případě dostaneme transformaci, která nemá samodružných bodů a z jejichž rovnic (29.13) je zřejmé, že se dá rozložit na osovou souměrnost o s rovnicemi (29.14) a na translaci τ s rovnicemi

$$\tau: x' = x + p$$

$$y' = y + q.$$

Proto je název tohoto zobrazení posunutě zrcadlení. Posunutě zrcadlení je tedy zobrazení, které nemá samodružné body a má dva k sobě kolmé samodružné směry; jeden směr má charakteristické číslo 1, druhý má charakteristické číslo -1.

2) α je nenulové. Z podstaty věci je zřejmé, že pro $\alpha = \pi/2$ dostaneme transformační rovnice pro osovou souměrnost, jejíž osa je symetrála 1. a 3. kvadrantu, a pro $\alpha = \pi$ dostaneme osovou souměrnost podle osy o_y .

$$a_2) t = -1.$$

Rovnice transformace f budou mít tvar

$$f: x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + p$$

$$y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + q. \quad (29.15)$$

Jedná se o přímou transformaci, protože matice transformace je

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}'$$

je její determinant
$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1.$$

Transformace (29.15) je přímá izometrie.

Určíme rovnice pro samodružné směry:

$$\begin{aligned} \varphi: ku_1 &= u_1 \cdot \cos \alpha - u_2 \cdot \sin \alpha \\ ku_2 &= u_1 \cdot \sin \alpha + u_2 \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

po úpravě

$$\begin{aligned} u_1 \cdot (\cos \alpha - k) - u_2 \cdot \sin \alpha &= 0 \\ u_1 \cdot \sin \alpha + u_2 \cdot (\cos \alpha - k) &= 0. \end{aligned} \tag{29.16}$$

Tato soustava má řešení, je-li

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha - k & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - k \end{vmatrix} = 0.$$

Charakteristická rovnice pro samodružné směry tedy je

$$(\cos \alpha - k)^2 + \sin^2 \alpha = 0. \tag{29.17}$$

Nyní musíme rozlišit:

$$\beta_1) \sin \alpha = 0$$

Zde mohou nastat dvě možnosti:

$$\beta_{11}) \cos \alpha = 1.$$

Z (29.17) plyne $k = 1$ a rovnice izometrie (29.15) budou mít tvar

$$\begin{aligned} f: x' &= x + p \\ y' &= y + q. \end{aligned}$$

To jsou rovnice translace (viz odst. 28), tedy izometrie, která má všechny směry samodružné s charakteristickým číslem $k = 1$ a nemá žádný samodružný bod, pokud vektor (p, q) je nenulový. Je-li $p = q = 0$, je f identické zobrazení, které má všechny body samodružné.

$$\beta_{12}) \cos \alpha = -1.$$

Z (29.17) pak dostaneme $k = -1$ a rovnice izometrie budou

$$\begin{aligned} f: x' &= -x + p \\ y' &= -y + q. \end{aligned} \tag{29.18}$$

To jsou rovnice středové souměrnosti se středem souměrnosti $S = [p/2, q/2]$. Podle odstavce 27 má středová souměrnost všechny směry samodružné s charakteristickým číslem $k = -1$.

$$\beta_2) \sin \alpha \text{ je nenulové číslo.}$$

Izometrie (29.15) nemá žádné samodružné směry a samodružné body můžeme určit ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + p \\y &= x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + q,\end{aligned}$$

kterou upravíme na soustavu

$$\begin{aligned}x \cdot (1 - \cos \alpha) + y \cdot \sin \alpha &= p \\-x \cdot \sin \alpha + y \cdot (1 - \cos \alpha) &= q,\end{aligned}$$

mající jediné řešení, neboť determinant matice soustavy

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{vmatrix} = (1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$$

je vzhledem k současným podmínkám

nenulový. Izometrie (29.15) má tedy jediný samodružný bod. Zvolíme-li jej za počátek souřadnic P , bude $p = q = 0$ a rovnice (29.15) se zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned}f: x' &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\y' &= x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

Je-li $X = [x, y]$ libovolný bod roviny, je $X - P = (x, y)$ a $X' - P = (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)$, takže $|PX|^2 = (X - P)^2 = x^2 + y^2$, $|PX'|^2 = (X' - P)^2 = (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha)^2 + (x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)^2 = x^2 + y^2$, protože $|PX| = |PX'|$.

Dále je

$$\begin{aligned}\cos \langle X - P, X' - P \rangle &= \frac{x^2 \cdot \cos \alpha - xy \cdot \sin \alpha + xy \cdot \sin \alpha + y^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha)^2 + (x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)^2}} = \\&= \frac{(x^2 + y^2) \cdot \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 \cdot \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha + x^2 \cdot \sin^2 \alpha + y^2 \cdot \cos^2 \alpha}} = \\&= \frac{(x^2 + y^2) \cdot \cos \alpha}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \cos \alpha.\end{aligned}$$

Izometrie (29.15) je v tomto případě rotací kolem bodu P o orientovaný úhel α (v kladném směru).

Další přímou transformací dostaneme pro případ

b) $c = -\sin \alpha$.

Z druhé rovnice (29.4) dostaneme, podobně jako v případě a)

$$b \cdot \cos \alpha - d \cdot \sin \alpha = 0$$

a po dosazení

$$b = t \cdot \sin \alpha, d = t \cdot \cos \alpha$$

do poslední rovnice (29.4) dostaneme opět rovnici (29.5) a podobně jako v případě a), musíme uvažovat dvě možnosti:

$$b_1) t = 1.$$

Pak je $b = \sin \alpha, d = \cos \alpha$ a rovnice transformace f budou mít tvar

$$\begin{aligned} f: x' &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha + p \\ y' &= -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + q. \end{aligned} \quad (29.19)$$

Je to přímá izometrie, neboť

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1.$$

Protože platí $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ a $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, vzniknou transformační vzorce (29.19) z transformačních vzorců (29.15) záměnou úhlu α za úhel $(-\alpha)$. Vztahy (29.19) jsou tedy pro $(p, q) = \mathbf{o}$ transformačními rovnicemi rotace se středem v P a úhlem otočení $(-\alpha)$.

$$b_2) t = -1.$$

Pak je $b = -\sin \alpha, d = -\cos \alpha$ a rovnice transformace f budou mít tvar

$$\begin{aligned} f: x' &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + p \\ y' &= -x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha + q. \end{aligned} \quad (29.20)$$

Tato transformace je nepřímá a vede opět k osové souměrnosti s jediným rozdílem, že směrnice osy o bude nyní záporná. Důsledky jsou čtenáři jistě známy.

V rovině tedy mohou existovat následující typy izometrií:

1) Přímé izometrie:

- a) identická transformace má všechny body samodružné a všechny směry invariantní,
- b) rotace má jediný samodružný bod a žádný reálný samodružný směr. Jejím invariantem je úhel rotace,
- c) středová souměrnost má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné s charakteristickým číslem -1 ,
- d) translace nemá žádný samodružný bod a má všechny směry invariantní.

2) Nepřímé izometrie:

- a) osová souměrnost má přímkou samodružných bodů, jejíž směr je invariantní. Její druhý samodružný směr má charakteristické číslo -1 a je kolmý k invariantnímu směru,

b) posunuté zrcadlení nemá samodružné body, má dva k sobě kolmé samodružné směry. Jeden z nich je invariantní, druhý má charakteristické číslo -1 .

Shrnutí 29

V obsáhlé 29. kapitole jsme získali přehled o všech izometrických transformacích na přímce, a zejména v rovině. Přehled všech přímých a nepřímých izometrických transformací v rovině je uveden na konci článku. Uveďme zde poznámku o tom, že vzorce (29.15) představují rotaci kolem počátku v kladném směru rotace, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček, o úhel α , rovnice (29.19) jsou rovnicemi rotace kolem počátku P v záporném směru rotace, tj. po směru otáčení hodinových ručiček. Tato skutečnost je zřejmá také z toho, že $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, zatímco $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, takže změním-li směr otáčení, funkce kosinus se nezmění, avšak funkce sinus změní znaménko. Význam nepřímých izometrií daných vzorci (29.7) a (29.19) se nejrychleji pochopí při vymodelování na počítači. Otáčení kolem libovolného bodu $S \neq P$ se provádí ve třech krocích: 1) translace s vektorem $P - S$ (tedy vlastně posunutí do počátku souřadné soustavy), 2) rotaci kolem počátku souřadné soustavy a 3) posunutí s vektorem $S - P$ (tedy lidově řečeno „vrácení zpět“).

30. Izometrie v \mathbf{E}_3

Provést komplexní analýzu všech izometrických transformací v prostředí \mathbf{E}_3 je námět na diplomovou práci. V tomto článku si rozhodně neděláme žádné naděje na její provedení. Půjde o výčet těch základních transformací s tím, že příslušné transformační rovnice nějak doplníme, přičemž využijeme našich znalostí z minulého článku a z kapitol o izometrických transformacích v \mathbf{E}_n .

Izometrie v $\mathbf{E}_3 = \langle \mathbf{A}, \mathbf{V}_3 \rangle$ je vzhledem k libovolnému kartézskému souřadnicovému systému $S = \langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ pro $X \in \mathbf{A}$, $f(X) = X'$, $X = [x, y]$, $X' = [x', y']$ dána rovnicemi

$$\begin{aligned} f: x' &= ax + by + cz + p \\ y' &= dx + ey + gz + q \\ z' &= hx + iy + jz + r, \end{aligned} \quad (30.1)$$

(koeficient f jsme vynechali, aby se při ručním psaní nemohlo zaměnit f za f), kde

$$\begin{pmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & g & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (30.2)$$

Musí tedy být

$$\begin{aligned} a^2 + d^2 + h^2 &= 1, \\ ab + de + hi &= 0, \\ ac + dg + hj &= 0, \\ b^2 + e^2 + i^2 &= 1, \\ bc + eg + ij &= 0, \\ c^2 + g^2 + j^2 &= 1. \end{aligned} \quad (30.3)$$

Nikoho asi nepřekvapí, že k výpočtu devíti koeficientů nemáme k dispozici devět nezávislých rovnic. Kdyby tomu tak bylo, existovala by jediná izometrická transformace v \mathbf{E}_3 . Víme, že skutečnost je jiná. Mohli bychom soustavu (30.3) podrobně zkoumat a zjišťovat jednotlivé možnosti. Je to dost zdlouhavá a náročná činnost. Rozhodli jsme se nepostupovat touto cestou. Proberme v jednotlivých bodech jednotlivé možnosti:

1. Z kapitoly 26 dovedeme např. stanovit transformační rovnice libovolné rovinové souměrnosti. Kdybychom zvolili třeba rovinu $z = 0$, dostaneme z transformačního vztahu

$$x_j' = x_j - \frac{2c_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right)$$

transformační rovnice (30.1) ve tvaru $x' = x + p$

$$y' = y + q \quad (30.4)$$

$$z' = -z + r .$$

To je ale zřejmě složená transformace, a to rovinová souměrnost podle roviny $z = 0$ a dále posunutí ve směru vektoru $\tau = (p, q, r)$. Protože skládání zobrazení není komutativní, budeme muset řešit priority i v (30.4). V jakém pořadí provedeme transformace, abychom vyhověli vztahu (30.4)? Protože z -ová souřadnice obrazu má opačné znaménko k z -ové souřadnici vzoru, je jasné, že transformační rovnice (30.4) představují napřed rovinovou souměrnost a potom teprve posunutí. V opačném případě bychom postupovali následovně:

$$x \rightarrow x + p \rightarrow (x + p)$$

$$y \rightarrow y + q \rightarrow -(y + q)$$

$$z \rightarrow z + r \rightarrow -(z + r) = -z - r,$$

tedy by transformační rovnice byly ve tvaru

$$x' = x + p$$

$$y' = y + q$$

$$z' = -z - r ,$$

což není totožné s (30.4).

Zobrazení složené z rovinové souměrnosti a posunutí se nazývá posunutá souměrnost.

Tato izomerie nemá žádné samodružné body, má však vektorový prostor \mathbf{V}_2 charakteristických vektorů s charakteristickým číslem 1. Libovolné dva z nich, které jsou k sobě kolmé, mohou být zvoleny za báze vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Libovolný vektor kolmý na oba tyto vektory je charakteristický vektor této posunuté souměrnosti s charakteristickým číslem -1. Libovolný z nich může být po jeho normování zvolen báze vektorem \mathbf{e}_3 . Modus této transformace je determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

který je roven -1, proto je posunutá souměrnost v \mathbf{E}_3 nepřímá izomerie.

Podobně bychom postupovali, kdyby rovnice roviny byla $x = 0$, popř. $y = 0$.

2. Dvě další transformace (podle 27) jsou rovněž známy. Jsou to identické zobrazení a translace (posunutí). Obě zobrazení mají stejnou (jednotkovou) matici zobrazení, takže transformační rovnice těchto zobrazení jsou

$$\begin{aligned}x' &= x + p \\y' &= y + q \\z' &= z + r\end{aligned}\tag{30.5}$$

a buď je vektor posunutí nulový (pak dostaneme identické zobrazení), nebo není nulový (pak dostaneme posunutí o tento vektor).

3. V kapitole 28. jsme poznali souměrnost podle středu. Je-li středem S přímo počátek souřadnic P , jsou transformační rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= -y \\z' &= -z,\end{aligned}\tag{30.6}$$

má-li střed souřadnice $S = [s_x, s_y, s_z]$, jsou transformační rovnice této středové souměrnosti

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2s_x \\y' &= -y + 2s_y \\z' &= -z + 2s_z,\end{aligned}\tag{30.7}$$

jak jsme poznali v kapitole 28.

4. Podívejme se nyní na transformace spojené s rotací. Rotace není transformace prostorová, nýbrž rovinná, neboť se děje vždy v rovině, v níž leží i střed rotace. Aby naše představy byly přesnější, zvolme v kartézském souřadném systému $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ přímky $X = P + t\mathbf{e}_1$, $Y = P + l\mathbf{e}_2$, $Z = P + k\mathbf{e}_3$. Ta první je nám dobře známá osa o_x , druhá je osa o_y a třetí osa o_z . Všechny transformační rovnice jsou již sestaveny vzhledem k takto definovaným osám.

4.1 Otáčení kolem o_z

Otáčení kolem osy o_z je otáčení v rovině rovnoběžné s rovinou xy . Rovnice rotace v rovině již známe. V této rotaci je osa o_z přímkou samodružných bodů, vektory kolinéární s vektorem \mathbf{e}_3 jsou charakteristické vektory s charakteristickým číslem 1. Je-li velikost rotace dána velikostí úhlu α (v kladném směru, tj. proti otáčení hodinové ručičky), jsou transformační rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}x' &= x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\y' &= x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \\z' &= z,\end{aligned}\tag{30.8}$$

v záporném směru (tj. po směru otáčení hodinové ručičky) použijeme vzorců

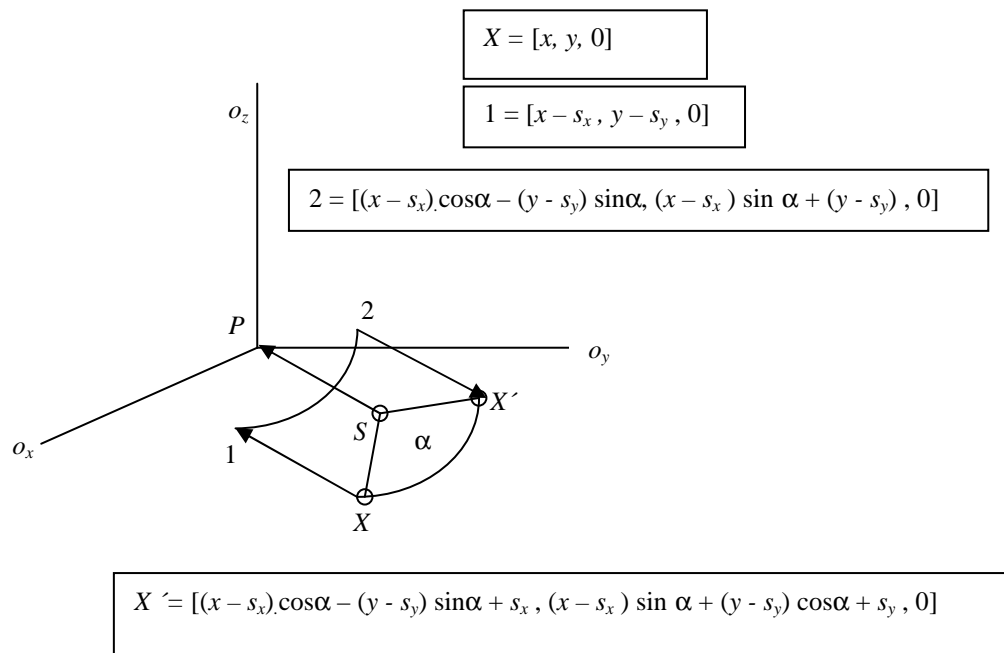
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad \text{a} \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad (30.9)$$

takže vzorce (30.8) se změňjí na tvar

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \\ y' &= -x \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (30.10)$$

4.2 Otáčení kolem přímky $o \parallel o_z$

Označme $S = o \cap xy$. V tomto případě je třeba provést napřed posunutí ve směru vektoru $P - S$, pak provést otočení kolem o_z a konečně znovu posunutí ve směru vektoru $S - P$. Necht' bod S má souřadnice $S = [s_x, s_y, 0]$. Sledujme situaci na obrázku 30.1



Z uvedeného je vidět, že transformační rovnice rotace kolem osy o rovnoběžné s osou o_z procházející bodem $S = [s_x, s_y, 0]$ o úhel velikosti $|\alpha|$ jsou

$$\begin{aligned} x' &= (x - s_x) \cdot \cos\alpha - (y - s_y) \sin\alpha + s_x \\ y' &= (x - s_x) \sin\alpha + (y - s_y) \cos\alpha + s_y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (30.11)$$

4.3 Otáčení kolem osy o_x

Cyklickou záměnou můžeme velmi snadno zapsat transformační rovnice pro otáčení vzhledem k dalším osám. Pokud se „díváme“ z kladné části osy o_z směrem k bodu P , pak při kladném smyslu otáčení podle této osy se osa o_x otáčí směrem k ose o_y . Transformační rovnice byly tvaru (30.8). Dívejme se nyní z kladné části osy o_x směrem k bodu P , při kladném smyslu otáčení podle této osy se osa o_y otáčí směrem k ose o_z . Transformační rovnice pak zcela analogicky budou ($x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$)

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha \\z' &= y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha.\end{aligned}\tag{30.11}$$

Samodružné body jsou body osy o_x , charakteristické vektory jsou vektory kolinéární s vektorem \mathbf{e}_1 a mají charakteristické číslo 1.

4.4 Otáčení podle osy o_y

Vše podstatné bylo řečeno v předchozím odstavci. Cyklickou záměnou z (30.11) dostaneme

$$\begin{aligned}x' &= z \cdot \sin\alpha + x \cdot \cos\alpha \\y' &= y \\z' &= z \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha.\end{aligned}\tag{30.12}$$

5. Souměrnost podle os

Souměrnost podle os vznikne rotací podle těchto os v případě, že $|\alpha| = \pi$. Každá taková transformace má přímkou (příslušná osa) samodružných bodů, samodružný směr s charakteristickým číslem 1 je směr osy souměrnosti, samodružné směry s charakteristickým číslem -1 jsou všechny směry kolmé k ose souměrnosti.

6. Šroubový pohyb

Předpokládejme pohyb šroubu (pravotočivého) ve směru osy o_z . Při otáčení šroubem v kladném směru otáčení (od o_x k o_y) zvětšuje bod na povrchu šroubu svoji z -vrou souřadnici úměrně velikosti úhlu otočení. Z této úvahy plynou i transformační rovnice

$$\begin{aligned}x' &= x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\y' &= x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \\z' &= z + k \cdot \alpha,\end{aligned}\tag{30.13}$$

kde $k > 0$ pro pravotočivý šroub a $k < 0$ pro levotočivý šroub.

7. Otáčivá souměrnost

Vznikne otáčením např. kolem osy o_z a rovinové souměrnosti podle roviny $z = 0$. Dostaneme transformační rovnice ve tvaru

$$f: x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

$$y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

$$z' = -z.$$

Můžeme tedy říci, že existují následující typy izometrií v \mathbf{E}_3 :

1) Přímé izometrie:

- a) identické zobrazení má všechny body samodružné a všechny směry invariantní,
- b) otáčení kolem osy má přímku samodružných bodů a jeden invariantní směr,
- c) souměrnost podle osy má přímku samodružných bodů, jeden invariantní samodružný směr a k němu kolmý prostor \mathbf{V}_2 samodružných směrů s charakteristickým číslem -1,
- d) translace nemá žádný samodružný bod a má všechny směry invariantní,
- e) šroubový pohyb nemá žádný samodružný bod a má jediný invariantní směr.

2) Nepřímé izometrie:

- a) souměrnost podle roviny má rovinu samodružných bodů, zaměření roviny souměrnosti je prostorem invariantních vektorů a směr, kolmý k rovině souměrnosti je samodružným směrem s charakteristickým číslem -1,
- b) otáčivá souměrnost má jediný samodružný bod a jediný samodružný směr s charakteristickým číslem -1,
- c) souměrnost podle středu má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné s charakteristickým číslem -1,
- d) posunutá souměrnost nemá žádný samodružný bod, prostor \mathbf{V}_2 invariantních samodružných směrů a k němu kolmý samodružný směr s charakteristickým číslem -1.

Shrnutí 30

V závěru článku je uvedeno devět základních izometrických transformací v prostoru \mathbf{E}_3 . Za zajímavost stojí, že pouze dvě složené transformace dostaly své jméno: otáčivá

souměrnost a posunutá souměrnost. Je ale samozřejmé, že je možno složit libovolné dvě izometrické transformace a dostaneme zase izometrickou transformaci.

31. Homotetie (stejnolehlosti)

V minulých šesti kapitolách jsme probrali izometrické transformace, včetně jejich aplikací na přímce a v rovině. V kapitole 12. , a zejména v tam uvedeném obr.12.2 vidíme zobrazení, tzv. středové zobrazení se středem v bodě S , které zobrazuje body jedné roviny do druhé roviny, která je s ní rovnoběžná, ale neprochází bodem S . Z obrázku 12.2 bylo také zřejmé, že každá úsečka se zobrazí rovněž na úsečku, jejíž velikost je k -násobná. To ovšem vede k představě hledat zobrazení, které „zachovává směry“, přesněji řečeno hledat zobrazení, v němž jsou všechny směry samodružné.

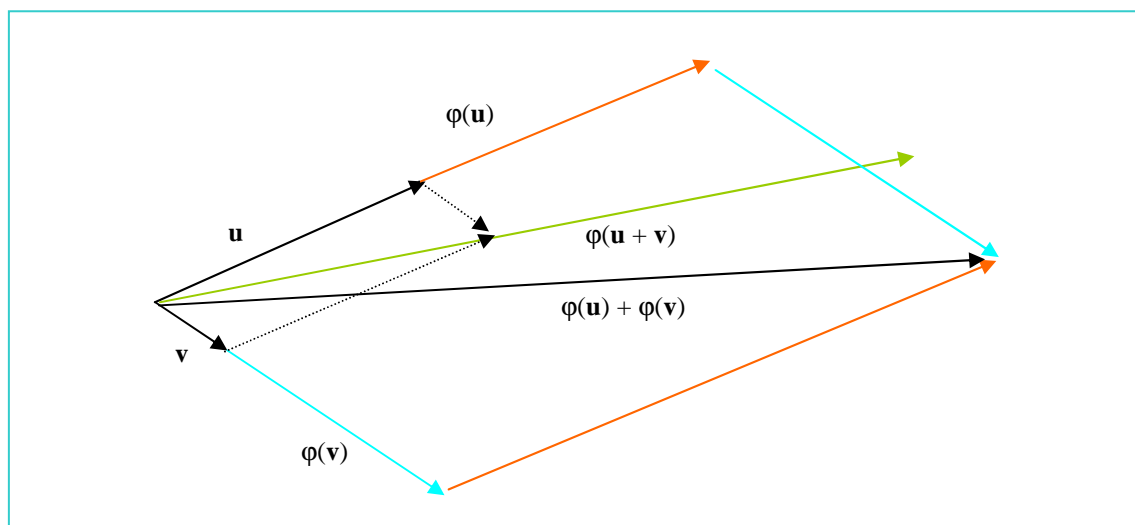
Budeme hledat v $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ takovou afinní transformaci, v níž jsou všechny směry samodružné. Nechť je f taková transformace a φ s ní asociované lineární zobrazení. Pak pro libovolné dva vektory z \mathbf{V}_n platí

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) \\ \varphi(c\mathbf{u}) &= c \cdot \varphi(\mathbf{u})\end{aligned}\tag{31.1}$$

Mají-li být vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} charakteristické, musí být

$$\varphi(\mathbf{u}) = k\mathbf{u} \quad \text{a zároveň} \quad \varphi(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}.$$

My ale vůbec nevíme, zda ty konstanty mají být stejné, zda např. nezáleží na směru těch vektorů. Asi budeme muset různost těch koeficientů dokonce předpokládat, nebo se pokusit dokázat opak. Výchozí představu poskytne obr.31.1.



Obr.31.1

Položme tedy $\varphi(\mathbf{u}) = k_u(\mathbf{u})$, $\varphi(\mathbf{v}) = k_v(\mathbf{v})$, $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k_{u+v}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

Má-li platit (31.1), musí být

$$\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) = k_{u+v}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k_{u+v}(\mathbf{u}) + k_{u+v}(\mathbf{v})$$

$$k_u(\mathbf{u}) + k_v(\mathbf{v}) = k_{u+v}(\mathbf{u}) + k_{u+v}(\mathbf{v})$$

čili

$$(k_u - k_{u+v})\mathbf{u} + (k_v - k_{u+v})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Protože vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} mohou být lineárně nezávislé, musí být $k_u - k_{u+v} = 0$ a zároveň $k_v - k_{u+v} = 0$, z čehož je zřejmé, že nemohou být v různých směrech různé koeficienty. Všechny samodružné směry mají stejné charakteristické číslo. Označme ho písmenem k .

Zvolme pevný bod $S \in A$. Pro libovolný bod $X \in A$ bude platit

$$\varphi(X-S) = k(X-S) \quad (31.2)$$

a označíme-li $f(X) = X'$, pak

$$X' - S' = k(X - S)$$

a

$$X' = S' + k(X - S) \quad (31.3)$$

Existují samodružné body tohoto zobrazení? Z (31.3) dostaneme

$$X = S' + k(X - S). \quad (31.4)$$

Úpravou ve tvaru $X - kX = S' - kS$ bychom nic nezískali, neboť obrát $(1 - k)X$ na levé straně rovnosti (31.4) dává neexistující výraz, neboť je to násobek bodu! Proto ze vztahu (31.4) uděláme součet vektorů.

$$X - S = (S' - S) + k(X - S) \quad (31.5)$$

a pak

$$(1 - k)(X - S) = S' - S,$$

odkud

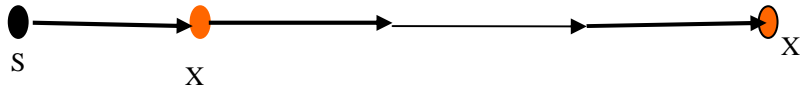
$$X = S + \frac{1}{1 - k}(S' - S), \quad (31.6)$$

což ovšem je úprava možná pouze pro $k \neq 1$. Ze vztahu (31.6) ale plyne, že samodružný bod existuje a je jediný. Nevadilo by, kdybychom bod S zvolili tím samodružným bodem?

Pro $S' = S$ dostaneme z (31.6) pouze potvrzení, že $X = S$. Je-li tomu tak, pak z (31.4) dostaneme transformační rovnici pro toto zobrazení

$$X' = S + k(X - S), \quad (31.7)$$

kde $k \in \mathbf{R}$. Kdyby $k = 0$, byl by S obrazem všech bodů nositelky A a z toho okamžitě plyne, že obraz každého vektoru by byl vektor nulový. Takové zobrazení můžeme z našich úvah vyloučit. Přijmeme tedy podmínku $k \in \mathbf{R} - \{0\}$. Zobrazování bodů podle tohoto předpisu ukazuje obr.31.2.



Obr.31.2

Definice 31.1: Toto zobrazení nazveme homotetií (stejnolehlostí), reálné nenulové číslo k se nazývá koeficient homotetie a bod S je střed homotetie a obraz bodu X v této homotetii budeme značit symbolem $h(X)$.

Věta 31.1: Homotetie h prostoru $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ má následující vlastnosti:

- a) Má jediný samodružný bod S ,
- b) Je-li $X \in A$, $X' = h(X)$, je
 - 1) $X' \in [S, X]$, tj X' náleží do lineárního obalu množiny $\{S, X\}$ v afinním prostoru \mathbf{A}_n ,
 - 2) $(X'XS) = k$,
- c) Dvě homotetické úsečky MN a $M'N'$ jsou navzájem rovnoběžné a je $\frac{|M'N'|}{|MN|} = k$,
- d) Zobrazení h je bijektivní transformace prostoru \mathbf{E}_n . K ní inverzní transformace h^{-1} je opět homotetie se stejným středem a koeficientem rovným převrácené hodnotě koeficientu homotetie h .
- e) Je-li v kartézském souřadnicovém systému $S = [s_1, s_2, \dots, s_n]$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $X' = [x_1', x_2', \dots, x_n']$, jsou rovnice homotetie h vzhledem k danému kartézskému souřadnicovému systému

$$\begin{vmatrix} k & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & k & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & k \end{vmatrix} = k^n .$$

Z toho plyne tvrzení f).

g) Sestrojení zobrazení, které by mělo tuto vlastnost, bylo výchozí podmínkou našich úvah.

Platí:

Je-li $k > 1$, popř. $k < -1$, nazveme homotetii zvětšením,

je-li $|k| < 1$, nazveme homotetii zmenšením,

je-li $k = 1$ je homotetie středovou souměrností se středem v S .

Dva útvary U, V jsou stejnolehle, existuje-li homotetie h taková, že $h(U) = V$.

Shrnutí 31

V tomto článku jsme hledali transformaci, která měla všechny směry samodružné. V tomto hledání jsme dospěli k tomu, že charakteristická čísla nemohou být v různých směrech různá. To byl první důležitý výsledek. Dále jsme zjistili, že takové zobrazení má jediný samodružný bod. Nazvali jsme ho homotetií a je třeba vždy přesně označit ten samodružný bod a to charakteristické číslo, které je ve všech směrech stejné. Tedy $h(S; k = \text{konkrétní číslo})$. Další vlastnosti homotetie jsou uvedeny ve větě 31.1. Pro $k = 1$ přechází homotetie v středovou souměrnost se středem v bodě S .

32. Grupa homotetií

V kurzu algebry jste poznali algebraickou strukturu, která měla název grupa. Zopakujme si, jaké vlastnosti máme očekávat. Musí být na prvcích nějaké množiny definována operace, která je uzavřená, je asociativní, existuje neutrální prvek vzhledem k této operaci a ke každému prvku existuje prvek inverzní. Hledejme nyní odpověď na otázku, zda množina všech homotetií (třeba v \mathbf{E}_2) s operací skládání zobrazení (\bullet) je grupou.

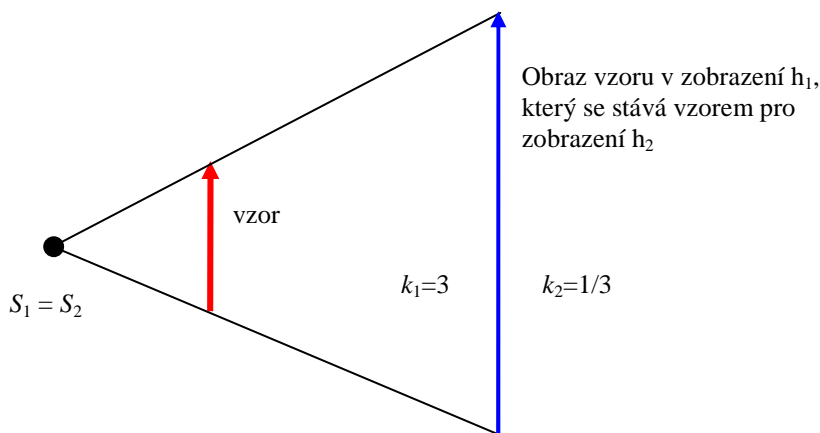
Věta 32.1 (Mongeova): Složíme-li dvě homotetie $h_1(S_1, k_1)$, $h_2(S_2, k_2)$ prostoru $\mathbf{E}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, pak složené zobrazení $h_2 \bullet h_1$ (tj. napřed h_1 a následně h_2) je:

- identickou transformací prostoru \mathbf{E}_n , je-li $S_1 = S_2$ a $k_1 \cdot k_2 = 1$,
- homotetií se středem S a koeficientem $k_1 \cdot k_2$, je-li $S_1 = S_2 = S$,
- posunutím o vektor $(k_2 - 1)(S_1 - S_2)$, jsou-li středy S_1, S_2 různé a $k_1 \cdot k_2 = 1$,
- homotetií se středem S , který leží na přímce $[S_1, S_2]$ a koeficientem $k_1 \cdot k_2$, jsou-li středy S_1, S_2 různé a není-li $k_1 \cdot k_2 = 1$.

Důkaz 32.1: Je-li $X \in A$, $h_1(X) = X'$, $h_2(X') = X''$, je $X' = S_1 + k_1(X - S_1)$, $X'' = S_2 + k_2(X' - S_2)$, je rovnice pro složené zobrazení $h_2 \bullet h_1$, pro něž je $h_2 \bullet h_1(X) = X''$,

$$X'' = S_2 + k_2 \cdot (S_1 - S_2) + k_1 \cdot k_2 (X - S_1) \quad (32.1)$$

a) Napřed obrázek.



Obr. 32.1

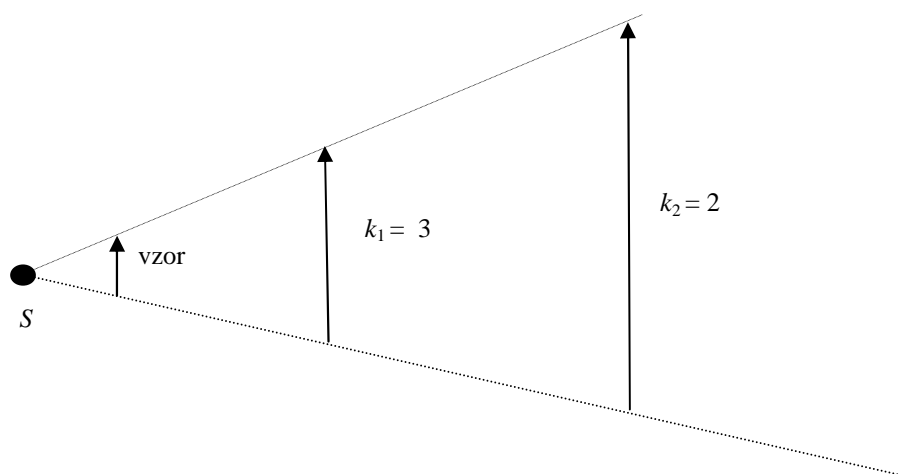
Když $S_1 = S_2$, pak můžeme ten jediný bod značit písmenem S . Dosadíme do vztahu (32.1), a protože $k_1.k_2 = 1$, dostaneme $X'' = X$, což je vztah pro identické zobrazení.

b) Sledujte postup důkazu na následujícím obrázku, kde $k_1.k_2 = 6$.

Vzhledem k uvedeným podmínkám je

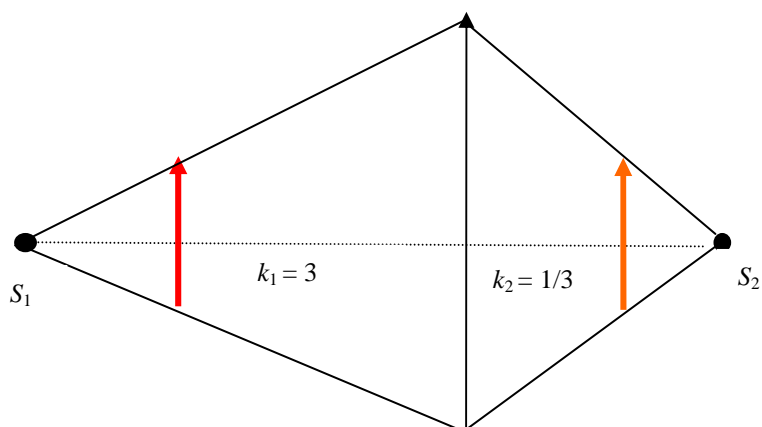
$$X'' = S + k_1.k_2(X - S),$$

což je homotetie se středem v bodě S a koeficientem $k_1.k_2$.



Obr 32.2

c) Obrázek:



Obr. 32.3

Jsou-li S_1, S_2 různé, $k_1.k_2 = 1$, bude mít rovnice složeného zobrazení tvar

$$X'' = X + (k_2 - 1).(S_1 - S_2),$$

Což je rovnice posunutí o vektor $(k_2 - 1) \cdot (S_1 - S_2)$.

d) Necht' jsou dány dvě homotetie $h_1 = (S_1, k_1)$, $h_2 = (S_2, k_2)$ a necht' $k_1 \cdot k_2 \neq 1$. Budeme zkoumat vlastnosti zobrazení $h_2 \circ h_1$. Zkoumejme, zda má samodružné body.

Postupujeme známým způsobem. V (32.1) dosadíme $X'' = X$ a dostaneme

$$X = S_2 + k_2(S_1 - S_2) + k_1 k_2 (X - S_1)$$

Protože je na pravé straně výraz $X - S_1$, bude výhodné dostat stejný výraz i na levou stranu uvedené rovnice (je to rovnice, máme vypočítat bod X). Tedy

$$X - S_1 = S_2 - S_1 + k_2(S_1 - S_2) + k_1 k_2 (X - S_1)$$

$$(1 - k_1 k_2) (X - S_1) = S_2 - S_1 + k_2(S_1 - S_2) .$$

$$(1 - k_1 k_2) (X - S_1) = S_2 - S_1 - k_2(S_2 - S_1)$$

Protože je $k_1 k_2 \neq 1$, je výraz $1 - k_1 k_2$ nenulový, můžeme jím dělit. Obdržíme

$$X - S_1 = \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} (S_2 - S_1)$$

a tedy

$$X = S_1 + \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} (S_2 - S_1), \quad (32.2)$$

z čehož plyne, že takový samodružný bod existuje a je jediný.

V další části důkazu bychom napsali rovnici přímky procházející body S_1 a S_2 a dokázali bychom, že bod X , který je dán vztahem (32.2) na této přímce leží. Po matematické stránce je ten výpočet naprosto jednoduchý, ale vzhledem k indexům je strojový zápis hodně komplikovaný, takže ho tady nevedeme.

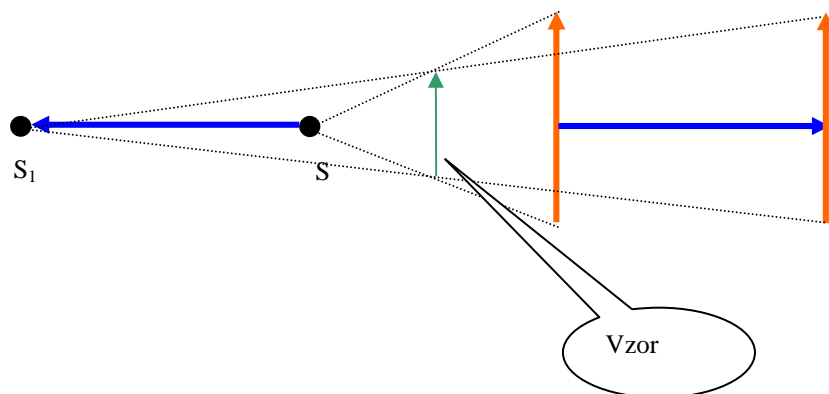
Věta 32.2 Je-li h homotetie o středu S a koeficientu k , který se nerovná 1, a τ translace o vektor \mathbf{u} , je:

a) $\tau \circ h$ je homotetie o středu $S_1 = S + \frac{1}{1 - k} \mathbf{u}$ a koeficientu k ,

b) $h \circ \tau$ je homotetie o středu $S_2 = S + \frac{k}{1-k} \mathbf{u}$ a koeficientu k .

:

Ad a) Napřed homotetie a pak translace. Obrázek



Obr.32.3

Je-li $X \in A$, $h(X) = X'$, $\tau(X') = X''$, je

$$h: X' = S + k(X - S)$$

$$\tau: X'' = X' + \mathbf{u}.$$

Složené zobrazení $\tau \circ h$ má transformační rovnici

$$\tau \circ h: X'' = S + k(X - S) + \mathbf{u} \quad (32.3)$$

Samodružný bod stanovíme dosazením $X'' = X$, takže

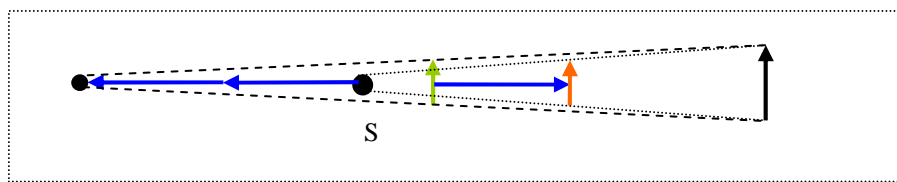
$$X - S = k(X - S) + \mathbf{u},$$

Takže je
$$X = S + \frac{1}{1-k} \mathbf{u} \quad (32.4)$$

Zobrazení má tedy jediný samodružný bod daný vztahem (32.4). Označme ho S_1 . Homotetie h_1 o středu S_1 a koeficientu k má rovnici

$$\begin{aligned} h_1: X' &= S_1 + k(X - S_1) = S + \frac{1}{1-k} \mathbf{u} + k \left((X - S) - \frac{1}{1-k} \mathbf{u} \right) = \\ &= S + k(X - S) + (1-k) \cdot \frac{1}{1-k} \mathbf{u} = S + k(X - S) + \mathbf{u}, \text{ což je } \tau \circ h. \end{aligned}$$

Ad b) Napřed translace a pak homotetie. Obrázek.



Obr.32.4

Nyní je $\tau(X) = X'$, $h(X') = X''$, takže $\tau: X' = X + \mathbf{u}$, $h: X'' = S + k.(X' - S)$, takže dostaneme

$$h \circ \tau: X'' = S + k.(X - S) + k.\mathbf{u}.$$

Při stanovení samodružných bodů dostaneme již známým způsobem

$$X - S = k.(X - S) + k.\mathbf{u}$$

$$(1 - k).(X - S) = k.\mathbf{u}$$

a z toho
$$X = S + \frac{k}{1 - k}.\mathbf{u}.$$

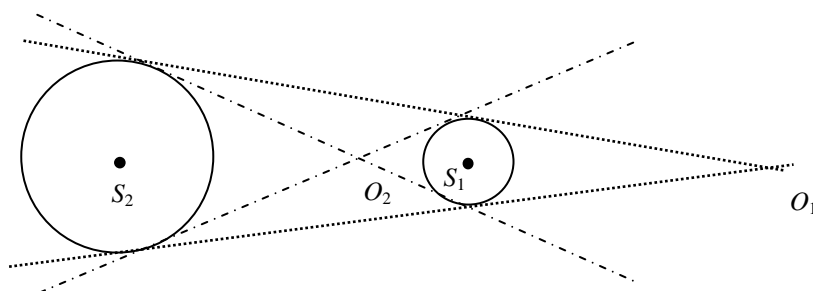
Ten je opět, jak je z vyjádření vidět, jediný. Označme ho S_2 . Homotetie h_2 se středem S_2 a koeficientem k má rovnici

$$X'' = S_2 + k(X - S_2) = S + \frac{k}{1 - k}.\mathbf{u} + k.\left((X - S) - \frac{k}{1 - k}.\mathbf{u}\right) = S + k(X - S) + k.\mathbf{u},$$

což je složení homotetie a translace.

Definice 32.1: Označme T množinu všech translací prostoru \mathbf{E}_n , H množinu všech homotetií prostoru \mathbf{E}_n , $M = T \cup H$. Binární systém $\langle M, \bullet \rangle$ je grupa. Nazveme ji Mongeovou grupou.

Věta 32.3: V \mathbf{E}_2 jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ s různými poloměry r_1, r_2 . Existují dvě homotetie $h_1(O_1, r_2/r_1)$, $h_2(O_2, -r_2/r_1)$, které kružnici k_1 zobrazí na kružnici k_2 .



Obr. 32.5

Důkaz věty se redukuje na úlohu sestrojít společné tečny dvěma kružnicím.

Shrnutí 32

Věta Mongeova (Monžova) hovoří o výsledku složení dvou homotetií o stejných popř. různých středech. Výsledkem je buď homotetie, nebo translace. Pak už zbývá vyšetřit složení homotetie a translace, o čemž mluví věta 32.2. Složením je vždy homotetie. Přidáme-li k translacím (i s nulovým vektorem translace, což je identita) homotetie, tak množina těchto dvou zobrazení spolu se skládáním zobrazení je grupa, což je vlastně společným výsledkem vět 32.1 a 32.2. V \mathbf{E}_2 se často používá homotetie, v níž se jedna kružnice zobrazuje na druhou. Z obr. 32.5 je vidět, že existují dvě takové homotetie.

33. Grupa podobných transformací prostoru E_n

Ještě ze základní školy si pamatujeme větu o podobných trojúhelnících. Víme také, že podobné trojúhelníky mají odpovídající strany ve stejném poměru jejich délek, avšak nemusí být nutně homotetické (stačí, aby byl obraz trochu otočen a už není žádný směr samodružný, což homotetii naprosto odporuje. Pojdme se nyní podívat na transformace podobné a naučme se je odlišovat od homotetií.

Definice 33.1: Transformace f prostoru $E_n = \langle A, V_n \rangle$ je podobná právě tehdy, když pro každé dva body $X, Y \in A$ je

$$|f(X)f(Y)| = k \cdot |XY|, \quad (33.1)$$

kde $k > 0$ je reálné číslo, které nazýváme poměrem podobnosti.

Je-li $k = 1$, je f shodné zobrazení. Vlastní podobné zobrazení má poměr podobnosti různý od 1.

Věta 33.1 Afinní transformace f prostoru $E_n = \langle A, V_n \rangle$ o rovnici $f: X' = X \cdot B + M$ je podobná právě tehdy, když $B \cdot B^T = k^2 \cdot E$, kde reálné číslo k je poměr podobnosti zobrazení f .

Důkaz 33.1: Je-li $Y \in A$, $Y' = Y \cdot B + M$, je $|X'Y'|^2 = k^2 \cdot |XY|^2 \Leftrightarrow \|Y' - X'\|^2 = k^2 \cdot \|Y - X\|^2 \Leftrightarrow \|(Y - X) \cdot B\|^2 = k^2 \cdot \|Y - X\|^2 \Leftrightarrow ((Y - X) \cdot B) \cdot (Y - X) \cdot B^T = k^2 \cdot (Y - X) \cdot (Y - X)^T = (Y - X) \cdot B \cdot B^T \cdot (Y - X)^T = k^2 \cdot (Y - X) \cdot (Y - X)^T \Leftrightarrow B \cdot B^T = k^2 \cdot E$.

Věta 33.2 Podobná transformace f prostoru $E_n = \langle A, V_n \rangle$ má tyto vlastnosti:

- je regulární afinní transformace,
- je bijektivní transformací prostoru E_n ,
- transformace inverzní k podobné transformaci je podobná transformace s poměrem podobnosti rovným převrácené hodnotě poměru podobnosti původní transformace,
- je-li φ lineární zobrazení asociované s podobnou transformací o poměru podobnosti k , je pro každé dva vektory $u, v \in V_n$

$$1. \|\varphi(\mathbf{u})\| = k \cdot \|\mathbf{u}\| ,$$

$$2. \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = k^2 \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} ,$$

e) zachovává odchylky (je to izogonální transformace),

f) každá vlastní podobná transformace prostoru \mathbf{E}_n má jediný samodružný bod.

Důkaz 33.2:

a) Je-li $f: X' = X \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}$ podobná transformace, je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = k^2 \mathbf{E}$, kde k je poměr podobnosti zobrazení f . Odtud dostaneme

$\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) = k^{2n} = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{B}^T) = (\det(\mathbf{B}))^2$, takže $\det(\mathbf{B}) = k^n$, takže modul transformace je nenulový.

b) Plyne z a) a z věty 3.4.

c) Je-li $f: X' = X \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}$, kde $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = k^2 \mathbf{E}$, je $f^{-1}: X = X' \cdot \mathbf{B}^{-1} -$

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^{-1}$. Zobrazení f^{-1} má tedy matici \mathbf{B}^{-1} a je nutno určit matici $\mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{B}^{-1})^T$. Dostaneme

$$\mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{B}^{-1})^T = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B}^T)^{-1} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} = (k^2 \mathbf{E})^{-1} = k^{-2} \cdot \mathbf{E} .$$

d) 1. Je-li $X \in A$, $Y = X + \mathbf{u}$, je $\mathbf{u} = Y - X$. Pak je $\|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\varphi(Y - X)\| = \|f(Y) - f(X)\| = k \cdot \|Y - X\| = k \cdot \|\mathbf{u}\|$.

2. Podle věty 16.1 e) podle d) 1. dostaneme $\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \cdot (\|\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi(\mathbf{v})\|^2) = \frac{1}{2} \cdot (\|\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v})\|^2 - k^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 - k^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2) = \frac{k^2}{2} \cdot (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) = k^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} .$

e) Necht' p, q jsou dvě přímky prostoru \mathbf{E}_n se směrovými vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} . Jejich obrazy p', q' mají směrové vektory $\varphi(\mathbf{u})$ a $\varphi(\mathbf{v})$ a platí

$$\cos \angle(p', q') = \frac{|\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v})|}{\|\varphi(\mathbf{u})\| \cdot \|\varphi(\mathbf{v})\|} = \frac{k^2 |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{k^2 \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \cos \angle(p, q) .$$

f) Je-li v kartézském souřadnicovém systému podobná transformace f dána rovnicí $f: X' = X \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}$, je pro $X' = X$ (hledáme samodružné body) $X \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{E}) = -\mathbf{M}$. Tato maticová rovnice představuje soustavu n lineárních rovnic, která má vektor neznámých $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Determinant matice této soustavy ($\det(\mathbf{B} - \mathbf{E})$) je nenulový, neboť

charakteristická rovnice $\det(\mathbf{B} - k\mathbf{E}) = 0$ nemůže mít pro vlastní podobné zobrazení kořen $k = 1$. Zobrazení f má tedy jediný samodružný bod.

Věta 33.3: Jsou-li f, g dvě podobné transformace prostoru \mathbf{E}_n s maticemi \mathbf{B}, \mathbf{C} vzhledem k jistému kartézskému souřadnicovému systému S s poměry podobnosti k_1, k_2 , je $g \circ f$ podobná transformace prostoru \mathbf{E}_n s maticí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ vzhledem k S a poměrem podobnosti $k_1 \cdot k_2$.

Důkaz 33.3: Stačí dokázat, že afinní transformace f s maticí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ je podobná transformace. Podle předpokladu je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = k_1^2 \cdot \mathbf{E}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T &= k_2^2 \cdot \mathbf{E}. \text{ Odtud } (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{B} \cdot (k_2^2 \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{B} \cdot k_2^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}^T) = k_2^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \\ &= k_2^2 \cdot (k_1^2 \cdot \mathbf{E}) = (k_2^2 \cdot k_1^2) \cdot \mathbf{E} = (k_2 \cdot k_1)^2 \cdot \mathbf{E} = (k_1 k_2)^2 \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Věta 33.4: Množina P_n všech podobných transformací prostoru \mathbf{E}_n je vzhledem k operaci skládání zobrazení grupou. Struktura $\langle P_n, \bullet \rangle$ je grupa podobných transformací prostoru \mathbf{E}_n .

Důkaz 33.4: Složením dvou podobných zobrazení vzniká opět podobné zobrazení, asociativní zákon platí proto, že násobení matic je asociativní a identická transformace (jednotkový prvek) je podobná transformace s koeficientem podobnosti $k = 1$.

Věta 33.5: Složíme-li shodnou transformaci prostoru \mathbf{E}_n s homotetií v \mathbf{E}_n s koeficientem k , dostaneme podobnou transformaci prostoru \mathbf{E}_n s poměrem podobnosti $|k|$. Naopak, každou podobnou transformaci prostoru \mathbf{E}_n s poměrem podobnosti k můžeme nekonečně mnoha způsoby rozložit na homotetii s koeficientem $\pm k$ a na shodnou transformaci prostoru \mathbf{E}_n .

Důkaz 33.5: Necht' s je shodná transformace prostoru \mathbf{E}_n o rovnici

$$\begin{aligned} X' &= X \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M} \text{ vzhledem ke kartézskému souřadnicovému systému } S \text{ a necht' homotetie } h \text{ má} \\ &\text{vzhledem k } S \text{ rovnici } X'' = S + k \cdot (X' - S). \text{ Pak je } \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{E} \text{ a } s \bullet h : X'' = S + k \cdot (X' - S) = \\ &= S + k \cdot [(X \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}) - S] = S + k \cdot [X \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{M} - S)] = X \cdot (k \cdot \mathbf{B}) + [S + k \cdot (\mathbf{M} - S)]. \end{aligned}$$

Abychom dokázali první část věty, musíme vypočítat:

$$(k \cdot \mathbf{B}) \cdot (k \cdot \mathbf{B})^T = k \cdot \mathbf{B} \cdot k \cdot \mathbf{B}^T = k^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = k^2 \cdot \mathbf{E}. \text{ První část věty je tedy pravdivá.}$$

Pro důkaz druhé části věty označme f podobnou transformaci prostoru \mathbf{E}_n s poměrem podobnosti k a h homotetii o libovolném středu $S \in A$ (A je nositelka v \mathbf{E}_n). Je tedy vzhledem k S : $f: X' = X \cdot C + M, C \cdot C^T = k^2 \cdot \mathbf{E}, h: X' = S + k \cdot (X'' - S)$.

$$h^{-1}: X'' = S + 1/k \cdot (X' - S).$$

Sestrojíme nyní transformaci $h^{-1} \bullet f$:

$$S + 1/k \cdot (X \cdot C + (M - S)) = X \cdot (1/k \cdot C) + (S + 1/k \cdot (M - S)).$$

Pro matici této transformace platí: $(1/k \cdot C) \cdot (1/k \cdot C)^T = (1/k \cdot C) \cdot (1/k \cdot C^T) = 1/k^2 \cdot k^2 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}$.

Je tedy $s = h^{-1} \bullet f$ shodná transformace prostoru \mathbf{E}_n a $f = h \bullet s$.

Shrnutí 33

V definici 33.1 se dovíme o podobnosti to nejzákladnější. Všimněme si, že poměr podobnosti je kladné číslo. Ve větě 33.1 se dovíme, jaké vlastnosti musí mít matice transformace, aby představovala podobnou transformaci. Další vlastnosti podobné transformace jsou obsaženy ve větě 33.2. V další větě se dovíme, že složení dvou podobných transformací vznikne zase podobná transformace, od toho je už jen krůček ke grupě podobných transformací. Věta 33.5 pak postulují tu skutečnost, že podobná transformace je složením homotetie a nějaké izometrie.

34. Podobné transformace v E_1 a E_2 . Podobnost geometrických útvarů

V minulém článku jsme odvodili, že nutná a postačující podmínka pro to, aby matice \mathbf{B} v transformační rovnici $X' = X \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}$ byla maticí podobného zobrazení je, aby $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = k^2 \mathbf{E}$. Najděme všechny možnosti pro tuto matici v prostředích E_1 a E_2 .

a) Podobné transformace v E_1

Je-li f podobné zobrazení v E_1 , má v kartézském souřadnicovém systému $S = \langle P, \mathbf{e} \rangle$ rovnici

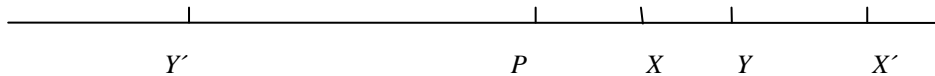
$$f: x' = ax + b,$$

kde pro matici (a) platí $(a) \cdot (a)^T = (a) \cdot (a) = (a^2) = k^2 \cdot (1)$. Odtud je

$$a^2 = k^2, \quad (34.1)$$

takže $|a| = |k|$, takže $k = a$ nebo $k = -a$.

Víme už, že b jsou souřadnice obrazu počátku kartézského souřadnicového systému. Můžeme tedy předpokládat, že pro $b = 0$ je P její jediný samodružný bod.



Obr. 34.1

Transformace na přímce mohou tedy být dvojího druhu

$$1) f: x' = kx, \quad (34.2)$$

$$2) f: x' = -kx. \quad (34.3)$$

Oba typy jsou rovnicemi stejnolehlostí na přímce E_1 se středem v bodě P s koeficienty k u prvního typu (na obr.34.1 je pro bod X hodnota $k = 3$) a $(-k)$ u druhého typu (na obr.34.1 pro bod Y je hodnota $-k = -2$). Uvědomme si při tom, že $k > 0$. Stejnolehlost typu 1) je přímé zobrazení na přímce, stejnolehlost typu 2) je nepřímé zobrazení na přímce.

Pokud je $b \neq 0$, je podobné zobrazení na přímce složeno z homotetie a translace s vektorem $\mathbf{b} = [b]$.

b) Podobné transformace v \mathbf{E}_2

Jsou-li

$$f: x' = ax + by + p$$

$$y' = cx + dy + q$$

rovnice vlastní podobné transformace roviny \mathbf{E}_2 v nějakém kartézském souřadnicovém systému $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, musí být matice transformace

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, matice $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a dostaneme podmínky ve tvaru

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= k^2, \\ ab + cd &= 0, \\ b^2 + d^2 &= k^2. \end{aligned} \tag{34.4}$$

Je-li P jediným samodružným bodem transformace f , je $p = q = 0$.

Z rovnic (34.4) dostaneme tyto čtyři možnosti

$$1) \quad a = k \cdot \cos \alpha, \quad c = k \cdot \sin \alpha$$

$$b = k \cdot \sin \alpha, \quad d = -k \cdot \cos \alpha$$

Transformační rovnice jsou

$$\begin{aligned} x' &= (k \cdot \cos \alpha) \cdot x + (k \cdot \sin \alpha) \cdot y \\ y' &= (k \cdot \sin \alpha) \cdot x - (k \cdot \cos \alpha) \cdot y \end{aligned} \tag{34.5}$$

$$2) \quad a = k \cdot \cos \alpha, \quad c = k \cdot \sin \alpha$$

$$b = -k \cdot \sin \alpha, \quad d = k \cdot \cos \alpha$$

Transformační rovnice jsou

$$\begin{aligned} x' &= (k \cdot \cos \alpha) \cdot x - (k \cdot \sin \alpha) \cdot y \\ y' &= (k \cdot \sin \alpha) \cdot x + (k \cdot \cos \alpha) \cdot y \end{aligned} \tag{34.6}$$

$$3) \quad a = k \cdot \cos \alpha, \quad c = -k \cdot \sin \alpha$$

$$b = k \cdot \sin \alpha, \quad d = k \cdot \cos \alpha$$

Transformační rovnice jsou

$$\begin{aligned}x' &= (k \cdot \cos \alpha) \cdot x + (k \cdot \sin \alpha) \cdot y \\y' &= (-k \cdot \sin \alpha) \cdot x + (k \cdot \cos \alpha) \cdot y\end{aligned}\tag{34.7}$$

$$4) a = k \cdot \cos \alpha, \quad c = -k \cdot \sin \alpha$$

$$b = -k \cdot \sin \alpha, \quad d = -k \cdot \cos \alpha$$

Transformační rovnice jsou

$$\begin{aligned}x' &= (k \cdot \cos \alpha) \cdot x - (k \cdot \sin \alpha) \cdot y \\y' &= (-k \cdot \sin \alpha) \cdot x - (k \cdot \cos \alpha) \cdot y\end{aligned}\tag{34.8}$$

V EXCELU modelujte každou z těchto uvedených transformací.

c) Podobnost geometrických útvarů v E_2

Dva geometrické útvary U , V prostoru E_2 jsou podobné právě tehdy, když existuje podobná transformace f prostoru E_2 tak, že $f(U) = V$.

Věta 34.1 Dva trojúhelníky MNP a $M'N'P'$ v prostoru E_2 jsou podobné právě tehdy, když je splněna aspoň jedna z následujících podmínek

$$a) \frac{|M'N'|}{|MN|} = \frac{|M'P'|}{|MP|} = \frac{|N'P'|}{|NP|},$$

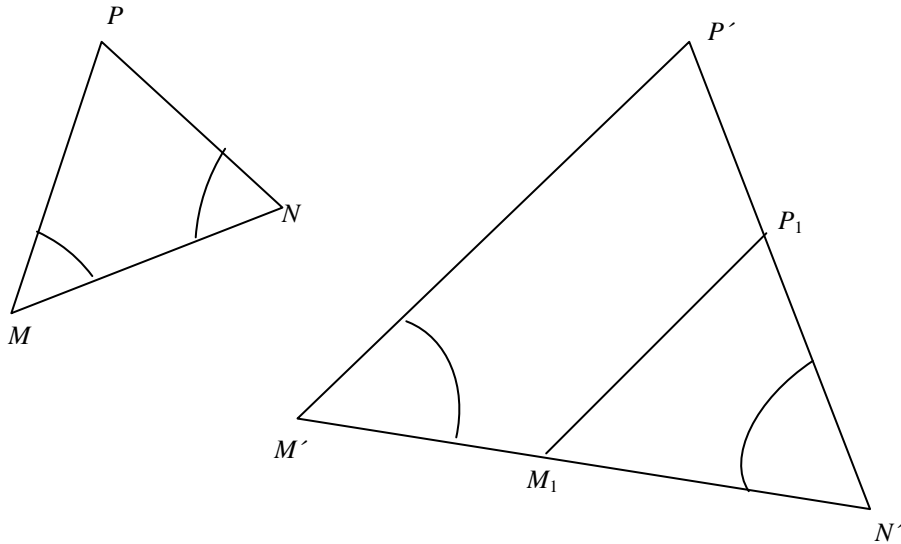
b) úhel MNP je shodný s úhlem $M'N'P'$ a úhel NMP je shodný s úhlem $N'M'P'$,

$$c) \frac{|M'N'|}{|MN|} = \frac{|M'P'|}{|MP|} \text{ a úhel } NMP \text{ je shodný s úhlem } N'M'P',$$

d) je-li $|MN| > |MP|$, pak $\frac{|M'N'|}{|MN|} = \frac{|M'P'|}{|MP|}$ a úhel NPM je shodný s úhlem $N'P'M'$.

Důkaz 34.1:

a) Jsou-li trojúhelníky MNP a $M'N'P'$ podobné, platí vztahy na základě vlastnosti $|f(X)f(Y)| = k |XY|$. Obráceně: platí-li uvedené vztahy, je dána v rovině trojice bodů (tedy reper) a jejich obrazů, čímž je dána jediná afinní transformace. Tou transformací je právě podobnost.



Obr. 34.2

b) Je-li $\angle MNP = \angle M'N'P'$, pak existuje shodné zobrazení s , které zobrazuje bod N na bod N' , $\rightarrow NM$ na $\rightarrow N'M'$ a $\rightarrow NP$ na $\rightarrow N'P'$. V této shodnosti je $s(M) = M_1$ a $s(P) = P_1$. Protože je trojúhelník MNP shodný s trojúhelníkem $M_1N'P_1$, je $\angle NMP = \angle N'M_1P_1$. Proto jsou úsečky M_1P_1 a $M'P'$ rovnoběžné. Existuje tedy homotetie se středem v bodě N' a koeficientem $|M'N'| / |M_1N'|$. a tím i podobné zobrazení $f: h \circ s$.

Obráceně: Jsou-li trojúhelníky MNP a $M'N'P'$ podobné, pak existuje podobné zobrazení, které je izogonální, jak jsme v minulé kapitole dokázali.

c) Jestliže platí c), pak existuje shodné zobrazení s tak, že $s(\angle NMP) = \angle N'M'P'$. Obrazem polopřímky MN v zobrazení s je tedy polopřímka $M'N'$, obrazem polopřímky MP je polopřímka $M'P'$, $s(P) = P_1$ je bodem polopřímky $M'P'$. Trojúhelník $M'N_1P_1$ je tedy shodný s trojúhelníkem MNP . To znamená, že $|MN| = |M'N_1|$ a $|MP| = |M'P_1|$. Z c) pak dostaneme

$$\frac{|M'N'|}{|M'N_1|} = \frac{|M'P'|}{|M'P_1|} = k, \text{ takže existuje homotetie } h(M', k) \text{ taková, že } h(N_1) = N' \text{ a } h(P_1) = P'.$$

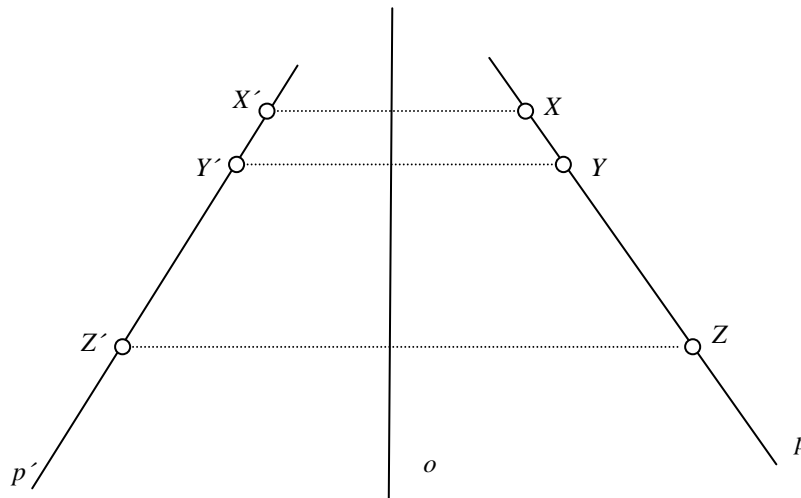
d) Důkaz je velmi podobný oběma předchozím. Kdyby nebyla splněna podmínka $|MN| > |MP|$, je úloha dvojznačná.

Shrnutí 34

Podobná zobrazení na přímce jsou buď přímá nebo nepřímá homotetie, popř. složené zobrazení z homotetie a translace. Podobná zobrazení v rovině jsou homotetie složené s rovinovou souměrností (vzorce (34.5) a (34.8)), popř. homotetie složené s rotací (vzorce (34.6) a (34.7)). Zvláštní význam měla věta 34.1, která vlastně zopakovala učivo o podobných trojúhelnících. Doporučujeme promyslet zejména poslední uvedenou možnost, kdy dva trojúhelníky mají dvě strany ve stejném poměru a shodují se dále v úhlu, který není těmi dvěma stranami sevřen. Pak ten úhel musí ležet proti větší z těch dvou stran. V opačném případě není úloha jednoznačná, takže trojúhelníky nemusí být podobné.

35. Základní afinity

Poznali jsme již několik afinních transformací. Všechny shodnosti, homotetie i podobnosti jsou afinní transformace. Všechny shodnosti zachovávaly velikosti odpovídajících úseček, všechny homotetie zachovávaly stejný poměr velikostí odpovídajících si úseček, všechny podobnosti byly složeny z homotetie a nějaké shodnosti. V této kapitole poznáme zobrazení, které zachovává dělicí poměr tří bodů ležících na odpovídajících si úsečkách. Jedno takové zobrazení jsme už poznali: byla to osová souměrnost podle osy o . Na obr. 34.1 můžeme tuto skutečnost názorně sledovat.

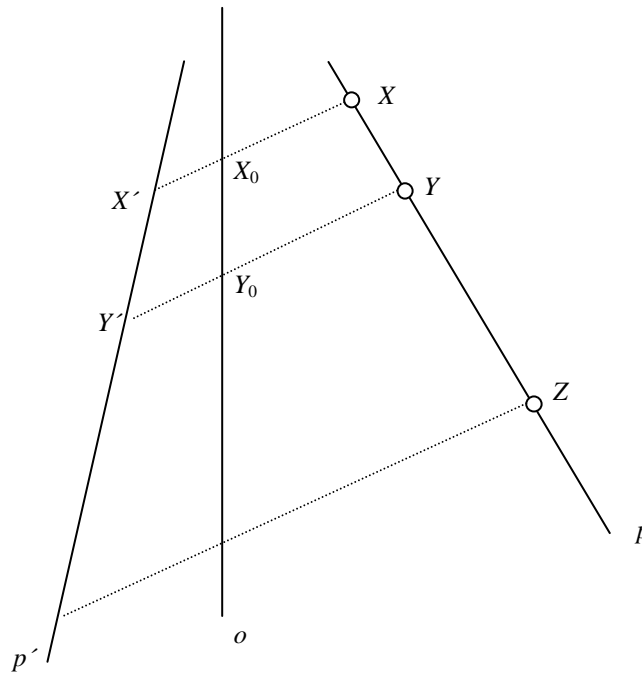


Obr. 35.1

Z vlastnosti osové souměrnosti je známo, že pro dělicí poměry bodů X, Y, Z a jejich obrazů X', Y', Z' platí $(XYZ) = (X'Y'Z')$. Je také známo, že body ležící na ose souměrnosti jsou samodružné. Změňme situaci tak, že ponecháme osu o , avšak promítací směry budou rovnoběžné, ale nebudou kolmé k ose o . Přímka p' musí být nyní sestrojena opět tak, aby se s přímkou p protínala na ose o , neboť $p \cap o$ je bod, který je samodružný. Může vzniknout situace podobná té, kterou představuje obr. 34.2. Zvolíme-li přímku p a na ní body X a Y , zvolíme obraz X' bodu X v tomto zobrazení.

Kam umístit obraz bodu Y ? To nebude problém, neboť víme, že obraz Y' bodu Y musí ležet na přímce p' , která je obrazem přímky p v tomto zobrazení, a dále na rovnoběžce s přímkou XX' vedené bodem Y . Označíme-li $X_0 = XX' \cap o$, pak dělicí poměr $(X'XX_0) = k$ je jakousi charakteristikou, protože musí být zachován pro všechny takto sestrojené body. Podobnou úvahu bychom mohli provést i pro trojrozměrný prostor, kde samodružné body by vyplňovaly určitou rovinu. Konstrukce obrazů by se prováděla

obdobně. V těchto dvou příkladech si ještě všimněme toho, že osa o je podprostor dimenze 1 v prostoru dimenze dvě, ve druhém případě je rovina podprostor dimenze 2 v prostoru dimenze tři. Připomeňme známou skutečnost, že podprostor dimenze $n - 1$ v prostoru dimenze n se nazývá nadrovina. Nyní máme již všechno připraveno ke sledování odborného textu.



Obr.35.2

Definice 35.1: Základní afinita (označení \mathbf{a}) je neidentická afinní transformace afinního prostoru $\mathbf{A}_n = \langle \mathbf{A}, \mathbf{V}_n \rangle$, jejíž všechny samodružné body tvoří nadrovinu v \mathbf{A}_n .

Věta 35.1: Základní afinita v \mathbf{A}_n , která má nadrovinu $\alpha: c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c = 0$ samodružných bodů a v níž obrazem bodu $R[r_1, r_2, \dots, r_n]$, který neleží v nadrovině α , je bod $R[r_1', r_2', \dots, r_n']$, má rovnice

$$x_1' = x_1 + \frac{r_1' - r_1}{\sum_{i=1}^n c_i x_i + c} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right)$$

$$x_2' = x_2 + \frac{r_2' - r_2}{\sum_{i=1}^n c_i x_i + c} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right) \quad (35.1)$$

.....

$$x_n' = x_n + \frac{r_n' - r_n}{\sum_{i=1}^n c_i x_i + c} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right)$$

Důkaz 35.1: Jsou-li f: $x_j' = \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i + m_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) rovnice afinního zobrazení f, jsou rovnice pro samodružné body

$$(b_{11} - 1)x_1 + b_{21}x_2 + \dots + b_{n1}x_n + m_1 = 0$$

$$b_{12}x_1 + (b_{22} - 1)x_2 + \dots + b_{n2}x_n + m_2 = 0$$

.....

$$b_{1n}x_1 + b_{2n}x_2 + \dots + (b_{nn} - 1)x_n + m_n = 0 .$$

Protože všechny tyto rovnice jsou rovnicemi téže nadroviny α , musí pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ platit

$$b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2 + \dots + (b_{jj} - 1)x_j + \dots + b_{nj}x_n + m_j = k_j \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right) ,$$

takže

$$b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2 + \dots + b_{jj} x_j + \dots + b_{nj}x_n + m_j - x_j = k_j \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right)$$

z toho

$$x_j' = x_j + k_j \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right) . \quad (35.2)$$

Dosadíme-li do těchto rovnic souřadnice bodů R a R' , dostaneme

$$r_j' = r_j + k_j \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right) .$$

Protože bod R není bodem nadroviny α , je $(\sum_{i=1}^n c_i r_i + c)$ nenulové číslo, takže můžeme vypočítat koeficient k_j ze vztahu

$$k_j = \frac{r_j' - r_j}{\sum_{i=1}^n c_i r_i + c}$$

Po dosazení dostaneme

$$x_j' = x_j + \frac{r_j' - r_j}{\sum_{i=1}^n c_i r_i + c} \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c \right).$$

Věta 35.2: Je-li \mathbf{a} základní afinita v afinním prostoru \mathbf{A}_n s nadrovinou samodružných bodů α a je-li pro body X, Y , neležící v α , $\mathbf{a}(X) = X'$, $\mathbf{a}(Y) = Y'$, je $[X, X'] \parallel [Y, Y']$.

Důkaz 35.2: Jsou-li (35.1) transformační rovnice, dostaneme z nich

$$x_j' - x_j = \frac{r_j' - r_j}{\sum_{i=1}^n c_i r_i + c} \sum_{i=1}^n c_i x_i + c$$

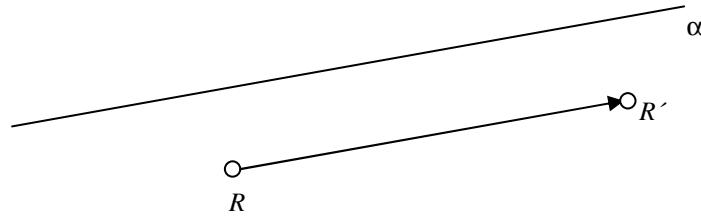
Pro vektor $X' - X$ tedy platí

$$X' - X = \frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i + c}{\sum_{i=1}^n c_i r_i + c} \cdot (R' - R)$$

Je tedy $[X' - X] \parallel [R' - R]$, a tedy také $[Y' - Y] \parallel [R' - R]$. Podle tranzitivnosti platí tvrzení věty.

Definice 35.2: Není-li bod R bodem nadroviny samodružných bodů základní afinity \mathbf{a} a je-li $R' = \mathbf{a}(R)$, nazveme směr, určený vektorem $R' - R$, směrem základní afinity \mathbf{a} .

Definice 35.3: Elace je základní afinita, v níž je směr rovnoběžný s nadrovinou α samodružných bodů.



Obr. 35.3

Věta 35.3: Je-li $\alpha: \sum_{i=1}^n c_i x_i + c = 0$ nadrovina v afinním prostoru $\mathbf{A}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, je základní afinita \mathbf{a} prostoru \mathbf{A}_n elací s nadrovinou samodružných bodů α právě tehdy, když pro libovolný bod $R[r_1, r_2, \dots, r_n] \in A$ a jeho obraz $\mathbf{a}(R) = R' [r_1', r_2', \dots, r_n']$ platí

$$\sum_{i=1}^n c_i (r_i' - r_i) = 0 .$$

Důkaz 35.3: Skalární součin normálového vektoru a vektoru zaměření je roven nule.

Definice 35.4: Rovnoběžné promítání do nadroviny α je základní afinita s nadrovinou samodružných bodů α , v níž leží obrazy všech bodů nositelky A afinního prostoru $\mathbf{A}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$.

Definice 35.5: Nadrovinová afinita \mathbf{a} v afinním prostoru $\mathbf{A}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ je základní afinita s nadrovinou samodružných bodů α , jejíž směr není rovnoběžný s α a pro každý bod R , který není bodem nadroviny α platí, že obraz $R' = \mathbf{a}(R)$ rovněž není bodem nadroviny α .

Věta 35.4: Budiž \mathbf{a} nadrovinová afinita v afinním prostoru $\mathbf{A}_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ s nadrovinou samodružných bodů α , $X \in A$ bod, který neleží v α , $X' = \mathbf{a}(X)$, $X_0 = [X, X'] \cap \alpha$. Dělicí poměr $k = (X'X X_0)$ je pro všechny body $X \in A - \alpha$ konstantní.

Důkaz 35.4: Zvolme v \mathbf{A}_n souřadnicový systém v bod $R = [r_1, r_2, \dots, r_n] \in A$, který neleží v α . Necht' $R' = \mathbf{a}(R) = [r_1', r_2', \dots, r_n']$. Necht' $\alpha: \sum_{i=1}^n c_i x_i + c = 0$ je rovnice nadroviny α , $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $X' = \mathbf{a}(X) = [x_1', x_2', \dots, x_n']$, $X_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}] \in \alpha$.

Je

$$\sum_{i=1}^n c_i x_{0i} + c = 0 \quad . \quad (35.3)$$

Protože $X' - X = k(X - X_0)$, tedy pro každé $j = 1, 2, \dots, n$

$$x_j' - x_{0j} = k(x_j - x_{0j}) ,$$

odkud

$$x_{0j} = \frac{kx_j - x_j'}{k-1}$$

a po dosazení dostaneme

$$x_{0j} = x_j - \frac{r_j' - r_j}{(k-1)(\sum_{i=1}^n c_i r_i + c)} (\sum_{i=1}^n c_i x_i + c) .$$

Tento výraz dosadíme do vztahu (35.3) a postupně dostaneme

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + c - \frac{1}{k-1} \cdot (\sum_{j=1}^n c_j \cdot \frac{r_j' - r_j}{(\sum_{i=1}^n c_i r_i + c)} (\sum_{i=1}^n c_i x_i + c)) = 0 ,$$

$$(\sum_{i=1}^n c_i x_i + c) \cdot (1 - \frac{1}{k-1} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n (r_j' - r_j)}{\sum_{i=1}^n c_i r_i + c}) = 0 ,$$

$$(k-1) \cdot (\sum_{i=1}^n c_i r_i + c) - (\sum_{j=1}^n c_j r_j' + c) + (\sum_{j=1}^n c_j r_j + c) = 0 .$$

$$k \cdot (\sum_{i=1}^n c_i r_i + c) - (\sum_{j=1}^n c_j r_j' + c) = 0 ,$$

a tedy

$$k = \frac{\sum_{j=1}^n c_j r_j' + c}{\sum_{i=1}^n c_i r_i + c} \quad (35.4)$$

Protože se ve výrazu (35.4) nevyskytují souřadnice bodu X , nezávisí koeficient k na těchto souřadnicích, tedy je pro všechny body stejný.

Definice 35.6: Koeficient k se nazývá charakteristika nadrovinové afinity.

Shrnutí 35

Již v kapitole 12. jsme poznali rovnoběžné promítání roviny na druhou rovinu, která s ní není rovnoběžná. Takové promítání nezachovává poměr velikostí odpovídajících si úseček. Řekli jsme ale, že jeho významná vlastnost je zachování dělicího poměru odpovídajících si bodů. Je-li o průsečnice těch dvou nerovnoběžných rovin, je z podstaty věci zřejmé, že odpovídající si přímky se protínají na o . Protože stejná úvaha platí pro libovolné dvě přímky, musí být všechny body přímky o samodružné. Přímku o jsme nazvali osou afinity. Odborná literatura je bohužel terminologicky nejednotná. Bylo by asi nejlépe, kdybychom všechna dosud poznaná zobrazení rozdělili do tří skupin: zobrazení shodná, podobná a afinní. Ta afinní zobrazení, probraná právě v této kapitole, by zachovávala kolinearitu (tu zachovávají všechna shodná i podobná zobrazení) a dělicí poměr (ten zachovávají všechna shodná i podobná zobrazení). Afinní zobrazení ale nezachovávají shodnost úseček (tu nezachovávají ani podobná zobrazení), ani poměr velikosti odpovídajících si úseček (ten zachovávají všechna shodná i podobná zobrazení). Z afinních transformací (podle tohoto rozdělení) jsme poznali rovnoběžné promítání do nadroviny, nadrovinovou afinitu a elaci. Jejich vlastnosti jsou popsány podrobněji v článku.

36. Klasifikace afinních transformací v A_2

Ve shrnutí 35 jsme vám navrhli rozdělit geometrická zobrazení na shodná, podobná a afinní. Proto název této poslední kapitoly je klasifikace afinních transformací, a nikoliv klasifikace základních afinit. Ta terminologická nejednotnost pramení z toho, že dosud poznané transformace, tedy shodnosti, podobnosti i afinity zachovávají kolinearitu (tedy jsou-li X, Y, Z tři body téže přímky, leží i jejich obrazy na jedné přímce). Někteří autoři označují všechna zobrazení, která mají tuto vlastnost jako afinní, na rozdíl od např. kruhové inverze, která tuto vlastnost nemá. Je lépe na tuto nejednotnost upozornit, než ji tiše přehlédnout.

V $A_2 = \langle A, V_2 \rangle$ zvolme souřadnicový systém $\langle P, e_1, e_2 \rangle$. Libovolná afinní transformace f má v něm rovnice

$$\begin{aligned} f: x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q \end{aligned} \quad (36.1)$$

Víme také, že soustavu (36.1) můžeme psát v maticovém tvaru

$$[x', y'] = [x, y] \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (p, q) \quad . \quad (36.2)$$

Je-li $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ matice transformace, víme již, že pro

shodné transformace musí platit $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{E}$,

pro podobné transformace $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = k^2 \mathbf{E}$,

což ale znamená, že matice transformace \mathbf{B} má tvar $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

a že podobné transformace jsou složením homotetie a izometrie. Záleží na pořadí tohoto skládání, obecně neplatí komutativnost. Aby pravá strana vztahu (36.2) představovala také bod, musí být ve tvaru „bod + vektor“, což je v afinním prostoru bod. Vektor (p, q) je polohový vektor obrazu počátku souřadné soustavy, což plyne okamžitě z toho, když dosadíme za bod $[x, y]$ právě $[0, 0]$.

Další afinní transformace v A_2 jsou základní afinity, které jsme poznali v předcházející kapitole. Pojďme si jich všimnout podrobněji:

Transformační rovnice (36.1) představují rovnoběžné promítání do osy o právě tehdy, když $ad - bc = 0$. Obrazy všech bodů z nositelky A leží na ose o . Tato transformace se nazývá singulární, protože zobrazuje A_2 do A_1 .

Zkuste si v EXCELU zobrazit např. trojúhelník $A = [-1, 1]$, $B = [6, -1]$, $C = [2, 4]$ rovnoběžným promítáním do osy o o rovnici $x - 2y - 2 = 0$. Rozhodněme ještě o směru afinity tak, že např. bod $R = [1, 2]$ se bude zobrazovat do bodu $R' = [2, 0]$. Přesvědčíme se, že bod R' leží na ose afinity.

Z minulé kapitoly víme, že transformační rovnice pro tento konkrétní případ jsou

$$x' = x + \frac{2-1}{1-2\cdot 2-2}(x-2y-2) = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}$$

$$y' = y + \frac{0-2}{1-2\cdot 2-2}(x-2y-2) = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{4}{5}$$

Vidíme, že $ad - bc = 0$. Popíšeme nyní vyplnění jednotlivých buněk.

Vrcholy trojúhelníka ABC zapíšeme do sloupců A – B a řádků 1 – 4 takto:

A1: **-1** B1: **1** C1: **=4*a1/5+2*b1/5+2/5** D1: **=2*a1/5+1*b1/5-4/5**

A2: **6** B2: **-1** Stáhneme předpis z C1 do C2 a z D1 do D2

A3: **2** B3: **4** Stáhneme předpis do buněk C3 a D3

A4 **-1** B4 **1** Stáhneme předpis o další řádek.

Osu o můžeme znázornit do společného grafu tak, že k tomu využijeme sloupce E a F. Každá přímka je dána dvěma body, my musíme provést uzavření cyklu přidáním třetího bodu, který bude roven tomu prvnímu. Ostatně totéž jsme udělali i u trojúhelníka, kde 4. řádek je pouze uzavřením cyklu. Takže konkrétně zvolme např.

E1: **0** F1: **-1** Bod $[0, -1]$ leží na ose o .

E2: **4** F2: **1** Bod $[4, 1]$ leží na ose o

E3: **0** F3: **-1** Slouží pouze k uzavření cyklu.

Po celkovém provedení grafu uvidíme, že obraz trojúhelníku ABC se v podstatě „ztratil“. Všechny jeho body mají svůj obraz na ose afinity.

Uvedený příklad znamenal kolmé promítání na osu afinity, neboť vektor $R' - R$ byl kolmý na směrový vektor osy o . Sami si můžete nechat vykreslit případ, kdy směr afinity není kolmý na osu. Ponechme osu afinity stejnou, bod R bude rovněž stejný, ale jeho obraz bude změněn takto: $R' = [4, 1]$. Tento bod rovněž leží na ose afinity. Odvodíme transformační rovnice a dostaneme tento výsledek:

$$x' = x + \frac{4-1}{-5}(x-2y-2) = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y + \frac{6}{5}$$

$$y' = y + \frac{1-2}{-5}(x-2y-2) = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}$$

Zatímco v prvním případě se počátek P promítal do bodu $P' = [2/5, -4/5]$, nyní se počátek promítá do bodu $P' = [6/5, -2/5]$. Oba tyto body leží na ose afinity.

Nyní budeme uvažovat pouze regulární základní afinity, takže determinant

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0. \quad (36.3)$$

Uřídíme samodružný směr. Ten je určen charakteristickým vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, pro nějž je

$$\begin{aligned} ku_1 &= au_1 + bu_2 \\ ku_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned} \quad (36.4)$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} (a-k)u_1 + bu_2 &= 0 \\ cu_1 + (d-k)u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (36.5)$$

Charakteristický vektor musí být nenulový, aby skutečně určil samodružný směr. Aby soustava (36.5) měla netriviální řešení, musí

$$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = 0$$

To je charakteristická rovnice, která po úpravě nabude tvaru

$$k^2 - (a+d)k + ad - bc = 0. \quad (36.6)$$

Řešení této rovnice závisí na hodnotě jejího diskriminantu

$$D = (a + d)^2 - 4ad + 4bc = (a - d)^2 + 4bc . \quad (36.7)$$

Protože $ad - bc \neq 0$ (36.3), má i (36.6) nenulové řešení. Existují tedy nenulová charakteristická čísla, která určují samodružné směry. Uvažujme jednotlivé případy:

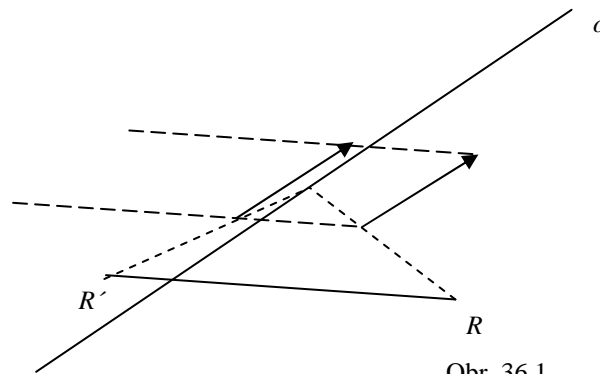
1) $D > 0$

Rovnice (36.6) má v tomto případě dva různé reálné kořeny k_1, k_2 . Existují tedy dva charakteristické směry o charakteristických číslech k_1 a k_2 .

Možnosti:

A) Jedno z čísel je rovno jedné. Předpokládejme, že $k_1 = 1$. Pak $k_2 \neq 1$, neboť kořeny musí být různé. Zde mohou nastat dvě možnosti:

a) osová afinita (s přímkou samodružných bodů). Uvědomme si, že směr osy je nejen samodružný, nýbrž je i invariantní, tzn. nemění velikost úseček.



b) osová afinita složená s translací (pokud není žádný samodružný bod).

B) Žádné z čísel není rovno jedné

a) osová afinita složená s homotetií.

α) Existuje jediný samodružný bod, pokud střed homotetie leží na ose afinity.

β) Neexistuje žádný samodružný bod, pokud střed homotetie neleží na ose afinity.

2) $D = 0$: Existuje jedno charakteristické číslo.

Možnosti:

A) $k = 1$

- a) Elace. Samodružné body jsou body ležící na ose afinity. Směr osy je invariantní.
- b) Elace složená s translací. Směr osy je invariantní, avšak neexistují samodružné body.

B) $k \neq 1$

- a) Homotetie a elace. Pokud leží střed homotetie na ose afinity, je tento střed jediný samodružný bod.
- b) Homotetie a elace. Pokud neleží střed homotetie na ose afinity, nemá toto zobrazení žádný samodružný bod.

3) $D < 0$: Neexistuje žádné charakteristické číslo, a tedy ani žádný charakteristický směr.

Možnosti:

- 1) Osová afinita složená s rotací. Může (nemusí) existovat jediný samodružný bod.
- 2) Elace složená s rotací. Může (nemusí) existovat jediný samodružný bod.

Shrnutí 36

V tomto článku jsme si ukázali aplikace afinních transformací v rovině. Prozkoumali jsme pomocí programu EXCEL singulární afinní transformaci, která se nazývá promítání do osy. Dostali jsme promítání roviny do přímky. Z regulárních afinních transformací jsme dostali tři možné situace, o nichž rozhodla hodnota jistého diskriminantu. Pro jeho kladnou hodnotu dostaneme osovou afinitu (popř. složenou s nějakou shodností), pro nulovou hodnotu jsme dostali elaci (popř. složenou s nějakou shodností) a pro zápornou hodnotu tohoto diskriminantu nedostaneme žádný samodružný směr. To je ale charakteristická vlastnost rotace, takže zřejmě dostaneme nějakou afinní transformaci složenou s rotací. Přehled je uveden v článku.

